

513
ОСНОВАНІЯ
ГЕОМЕТРІИ,

составленный

по системе ИМПЕРАТОРСКОЙ
С. ПЕТЕРБУРГСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ
АКАДЕМИКА С. Е. Гурьева.



кн. № 88

Карельская Публичная Библиотека

№ 513

кн. № 88

2-95

С. Петербургъ.

Въ типографіи Александра Смирдина

1825 года.

Печатать позволяется

съ тѣмъ, чтобы по напечатаніи, до выпуска изъ типографіи, представлены были семь экземпляровъ въ С. Петербургскій Цензурный Комитетъ, для препровожденія, куда слѣдуетъ, на основаніи уаконовеній.

С. Петербургъ, Маія 22 дня 1825 года.

Цензоръ Александръ Красовскій.

ЕГО ПРЕВОСХОДИТЕЛЬСТВУ

ГОСПОДИНУ

ГЕНЕРАЛЪ - ЛЕЙТЕНАНТУ,

ЧЛЕНУ ГОСУДАРСТВЕННОГО СОВѢТА,

СЕНАТОРУ,

МИНИСТРУ ФИНАНСОВЪ,

И

Орденъ Россійскихъ: Св. Александра
Невскаго, Св. Анны 1-й степени, Св.
Владимира 2-й степени большого
креста и разныхъ иностранныхъ
Кавалеру

ЕГОРУ ФРАНЦОВИЧУ

КАНКРИНУ

усерднѣйшее приношеніе.

ПРЕД С Л О В І Е.

Изученіе Математики во всё времена и
всѣми преобразователями наукъ признавае-
мо было однимъ изъ лучшихъ средствъ къ
развитію умственныхъ силъ души нашей, къ
образованію ихъ и къ содѣланію каждаго за-
нимающагося ею здравомыслящимъ, способ-
нымъ ощущать естественный ходъ сужде-
ній собственныхъ и другихъ и готовымъ къ
преодоленію трудностей, встрѣчающихся при
ислѣдованіи разныхъ истинъ. Въ семъ от-
ношеніи Математика полезнае всѣхъ другихъ
наукъ, изобрѣшенныхъ для направленія душев-
ныхъ нашихъ способностей къ извѣстной
цѣли и ихъ усовершенствованія. — Вотъ
что говоритъ о семъ извѣстнѣйшій Фило-
софъ и Математикъ Г. Вольфъ: „Всякой на-
выкъ приобрѣщается упражненіемъ, а не од-
нимъ ученіемъ правилъ. Чего ради хотя въ
„Логикѣ основательно преподаются всѣ пра-
вила для приобрѣщенія ясныхъ понятій и со-
составленія твердыхъ доказательствъ; одна-
ковоже не можетъ она приучить къ легкому
примѣненію правилъ употребленію. Но Математи-
ка, ежели надлежащимъ образомъ обучаться

„ей, непрестанно занимая умъ ясными понятіями, и прочными доказательствами, мало по малу и нечувствительнымъ образомъ приучаетъ его къ истинамъ и безошибочно употребляетъ правила Логики. Почему надлежитъ прежде обучаться Математикѣ, ежели кто хочетъ наблюдать истинный порядокъ въ наукахъ и проходить ихъ безъ потери времени.“ (*)

Но ни одна изъ наукъ, составляющихъ Математику, не можетъ съ болышею удобностію и пользою первоначально употреблена быть для изсѣпавленія юношества, какъ Геометрія, которая есть общій и единственный ключъ къ опыту и одна можетъ вдохнуть силы и охоту углубляться въ нихъ. Такъ пишетъ о ней знаменитый Монтукла въ своей превосходѣйшей Исторіи Математики. Но, по мнѣнію другихъ ученыхъишкихъ мужей, Геометрія не меньше полезна и для всѣхъ наукъ умственныхъ. — Она не рѣдко объясняетъ сужденія, споры и заключенія Метафизиковъ; въ ней полагаются шпиди вещи, коихъ доказательства служатъ

(*) Предувѣдомленіе къ сокращенію первыхъ основаній Математики Г. Волфа.

лучшею повѣркою правилъ Логикъ Искусственной и надежнѣйшимъ орудіемъ усовершенствованія Естественной; въ ней наблюдающіяся тѣ связь и точный порядокъ, коимъ слѣдованіе научаетъ насъ сама природа. — Краткость и точность въ доказательствахъ, ясность и основательность въ сужденіяхъ, строгость и правильность въ заключеніяхъ, суть тѣ качества, коими преимущественно славятся Геометры; но сіи качества не обходимы и для каждаго. Чтожь больше можеть способствовать приобрѣтенію оныхъ, если не Геометрія? — Порядокъ Синтетическій есть точный порядокъ, который наблюдаютъ и должны наблюдать истинно ученые; Г. Моншукла совѣтуетъ держаться его всякому, кто хочеть въ очевидной связи съ началами предлагать другимъ истинны; но чѣмъ лучше можно приучить развивающійся разумъ къ сему порядку, если не Геометріею, въ коей исключительно оный употребляется? Лучшія доказательства, говоритъ ученѣйшій Лакроа, суть тѣ; кои, утверждая истину на неоспоримыхъ началахъ, дѣлають явную связь съ другими истинами уже извѣстными и ясно показывають переходъ отъ одного предложенія къ другому; ктожь можеть смѣле ручаться

за успѣхъ въ такихъ доказательствахъ, если не шло, вѣдъ довольно занимался Геометріею, кто приучилъ себя слѣдовать употребленному въ ней порядку, кто и въ мысленіи и умствованіяхъ держится онаго, какъ ниши? Вотъ причины, по коимъ еще Древніе не дозволяли не знающимъ Геометріи пользоваться ихъ наставленіями! Вотъ почему Философы во всѣ времена были чтилцами сей первоначальной части Математики, желали видѣть ее усовершенствованною и доказывали словомъ и дѣломъ вліяніе оной на образованіе умственныхъ силъ души нашей! Вотъ почему полезно заниматься ею всякому, кто хочетъ въ мысляхъ своихъ и сужденіяхъ видѣть естественный ходъ ума и получить навыкъ излагать оныя такъ, чтобы ни чего не было въ нихъ неизвѣснаго, темнаго, сбивчиваго и не связнаго.

Но гдѣ найдемъ такую Геометрію, которая была бы написана прямо синтетически, въ коей не было бы ничего строгаго не доказаннаго, или непосредственно, или изъ предъидущаго, въ коей съ математическою точностію и ясностію были бы изложены начала и ихъ приложеніе и въ коей всякое предложеніе, всякое слѣдствіе помѣщены въ такой связи, что очевидны были бы и про-

исхождение ихъ и необходимость? Елементарны Евклида и Основанія Геометріи Г. Лежандра суть нѣ пронаведенія, кои превосходятъ все, что можно о селъ предметахъ писано было древними и новыми Геометрами: такъ высоко цѣнили и цѣнятъ первоклассныя Математики Елементарны Евклидовы; такъ отзывался и о нихъ и объ Основаніяхъ Г. Лежандра знаменитый Россійскій Математикъ, С. Петербургской Академіи Наукъ Академикъ, Семенъ Емельяновичъ Гурьевъ. Но могутъ ли оныя въ полной мѣрѣ удовлетворить, всегдѣ предначертаннымъ условіямъ, столько необходимымъ въ совершенствѣ учебной книги. Посильный опытъ на сіе могъ бы я произнести собиравшій; но оный слабъ будешь послѣ того, что написалъ о селъ Г. Гурьевъ и въ Предисловіи къ своимъ Основаніямъ Геометріи и въ своихъ Замѣчаніяхъ на средства принятыя Г. Лежандроу, дабы усовершенить и исправить Елементарны оной. (*) Оныя весьма строго доказаль, сколь многихъ поправленій пребуееть система Евклида и сколь далеки Основанія Г. Лежандра.

(*) Опытъ о усоверш. Елемент. Геометріи
стр. 162—200.

при всемъ ихъ превосходствѣ предъ прочими сего рода твореніями, есть нѣчто совершенства, такого, которое требовать систематически образованный читатель или лучше, ссылаясь словамижъ Г. Гурьева, читатель философіи.

Послѣ сего всякой, думаю, спроситъ: каковыжъ Основанія Геометріи Г. Гурьева? Имѣютъ ли нѣ совершенства, кои желать онъ видѣти въ Елементарѣхъ Евклида и въ Основаніяхъ Г. Лежандра? И на сіе въ отвѣтъ ни чего не могу сказать лучше самаго Г. Гурьева. Прочитайте начертанный имъ планъ для Основаній Геометріи (*), или прочитайте также введеніе къ онымъ и нѣ разсужденія, кои помѣщены предъ каждою изъ четырехъ книгъ, ихъ составляющихъ; и вы не можете не согласиться въ естественномъ расположеніи предмѣтовъ, въ непрерывной связи оныхъ и слѣдовательно въ превосходствѣ самыхъ Основаній. — Третья книга сихъ Основаній и въ расположеніи и въ связи и даже въ самыхъ доказательствахъ весьма много сходствуеетъ съ первою, а четвертая

(*) Опытъ о усоверш. Елемент. Геометріи
слр., 201—236.

со вторюю; въ нихъ каждое опредѣленіе, каждое предположеніе, каждое присовокупленіе помѣщены въ такомъ порядкѣ, что очевидно и произхожденіе оныхъ и приложеніе и необходимость. Кто-жъ не вѣдѣлся сими качествами? Кто не отнесетъ ихъ къ совершенству учебной книги? Кто не согласится, что при разборѣ истинъ, разбросанныхъ безъ порядка, учащійся долженъ почти въ одно и тоже время заниматься многими и разнообразными предметами, которые, поступая одинъ за другимъ въ память его, или тупятъ же другъ друга изглаживающы, или сдѣлываются одинъ съ другимъ такъ, что сосредоточить в нихъ понятія весьма трудно, и которые, по сей причинѣ, составляютъ не матеріалъ для размышленій, а собраніе того, что обременяетъ память, ослабляетъ воображеніе, уменьшаетъ вниманіе и приглушаетъ способности сужденій? Посему, а особливо притомъ въ разсужденіе уменьшенныя силы учащихся, изъ коихъ большая часть въ наукахъ идущъ, такъ сказать, ощупью, что имъ вѣрнѣе, что изъясненное предѣлимъ сходство книгъ, составляющихъ Основанія Геометріи Г. Гурьева, весьма много способствующее легчайшему изученію оныхъ, избавляя учащихся отъ новыхъ усилій проия-

занъ въ ходъ истины и истъ извръженъа спо-
гнть послѣдующее съ предыдущимъ? Кто
не сознается, что все сіе есть следствие
неполненія съ особеннымъ искусствомъ на-
чертаниаго плана? — Теорія пропорцій и
теорія предѣловъ, изложенныя въ оныхъ О-
снованіяхъ, также суть неоспоримыя доказа-
тельства превосходства ихъ предъ другими.
Несомненно, сколь много сіи теоріи обязаны
усовершенствованіемъ Г. Гурьева; не говорю,
что онъ сдѣлалъ лучшаго въ нихъ по срав-
ненію съ Евклидомъ, Леонардомъ и Ваады-
вою Машепашиковымъ — Архимедомъ; не го-
ворю, съ какою точностію и ясностію онъ
предложенъ; не говорю, съ какою удивитель-
ною строгостію употреблены въ ихъ при-
ложеніи; но не могу не замѣтить, что онъ
пробудитъ востаннмъ памятникомъ мате-
матическихъ трудовъ Г. Гурьева, образцемъ
глубокомыслія и проникательности систе-
матически образованнаго ума и сладостнымъ
для всякаго Русскаго утѣреніемъ, что отече-
стви наше никогда не будетъ имѣть недо-
статка въ достойныхъ славы его Машепа-
шикахъ.

Послѣ всего, что сказано мною отно-
сительно Основаній Геометріи Г. Гурьева,
нельзя не усумниться въ ихъ превосходствѣ.

Впрочемъ не скрою того, что большей частью чинителей извѣстно. Основанія сіи при всемъ превосходствѣ ихъ, при всей ясности и ясности изложенныхъ въ нихъ началъ и истинъ, при всей строгости доказательствъ для многихъ казались и кажутся неприступными; причиною сего и наружная величина самой книги и сложность доказательствъ нѣкоторыхъ предложеній, зависящая не отъ сущности сихъ послѣднихъ, а отъ образа изложенія первыхъ. Обучаясь самъ и обучая другихъ по симъ Основаніямъ, я не могъ также не чувствовать справедливости замѣчаній о несообразности оныхъ съ другими частями Математики; посему, сколько могъ, старался сокращать ихъ. Сихъ же наблюденій и усилій моихъ плодъ сушь издаваемыи нынѣ Основанія Геометріи. Онѣ по величинѣ своей едва составляютъ третью образца ихъ; но къ сему достигъ я не опущеніемъ многихъ истинъ, составляющихъ Основанія Геометріи Г. Гурьева, не опущеніемъ отъ порядка и началъ, въ коихъ состоитъ заключительное измѣщеніе сихъ Основаній, не нарушеніемъ связи и строгости доказательствъ, показывающихъ тонкій и провицательный умъ Г. Гурьева; но соединеніемъ многихъ предложеній съ другими подъ ви-

доть самоближайшихъ и очевидѣйшихъ изъ нихъ слѣдствій, облегченіемъ теоріи величинъ пропорціональныхъ и теоріи предѣловъ въ ихъ приложенияхъ, введеніемъ на вѣкошорыя предложенія легчайшихъ доказательствъ собственныхъ и другихъ и спротивъ наблюденіемъ единства въ изложеніи оныхъ. — Ознакомить Россійское юношество съ свѣтлою опечесивеннаго Геометріи и симъ болѣе увѣковѣчить памянь его въ сердцахъ признательныхъ согражданъ; издать Основанія Геометріи, кои съ вѣщною пользою могли бы замѣнить другія по сей часи произведенія и вмѣстѣ служить Практическою Логикою, — быть единственныя побужденія, коими руководствовалъ я при составленіи издаваемыхъ Основаній. Достигъ ли желаемаго, — рѣшить сіе предоснаваю безпристрастнымъ изыскателямъ истины и спротивъ цѣлителямъ всего полезнаго. Ималось слабое надеждою, что они не осмѣяютъ награды ревности и труда мои своимъ замѣчаніемъ и тѣмъ способствовать пришеденію сихъ Основаній къ большаго совершенству и употребленію.

Алексій Ильинскій.

ОСНОВАНІЯ ГЕОМЕТРИИ.

ВВЕДЕНІЕ.

1. Въ каждомъ естественномъ тѣлѣ примѣчаемъ шесть сторонъ: правую и лѣвую, переднюю и заднюю, верхнюю и нижнюю, изъ коихъ каждыя двѣ, вмѣстѣ взявши, суть взаимно противоположныя; откуда заключаемъ, что каждое естественное тѣло имѣетъ три протяженія: отъ правой стороны къ лѣвой, отъ передней къ задней и отъ верхней къ нижней, или обратно; и посему все то, что имѣетъ три протяженія, мы обыкновенно называемъ тѣломъ. Но подъ сего единою принадлежностію разсматриваемыя тѣла, по справедливости, отъ естественныхъ отличающіяся и геометрическими именуются; ибо естественныя тѣла, сверхъ сего, суть не проицаемы, тяжелы и проч. И такъ геометрическія тѣла покуда протяженны и суть не иное что, какъ мѣста, естественными тѣлами занимаемая, или вообще, не иное что, какъ въ предѣлахъ содержащія части пространства, весь міръ въ себѣ заключающаго.

2. Естественныя тѣла имѣютъ край или предѣлы; и геометрическія, какъ мѣста, естественными занимаемая, или какъ въ предѣлахъ содержащія части пространства, весь міръ въ себѣ заключающаго, должны

имѣть ихъ. Представимъ какое ничесъ геометрическое тѣло; оное простирается отъ правой стороны къ лѣвой, отъ передней къ задней и отъ верхней къ нижней, или обратно (1); посему и предѣлы его, какъ содержащіяся между сими сторонами, должны простирались или отъ правой стороны къ лѣвой и отъ передней къ задней, или отъ правой къ лѣвой и отъ верхней къ нижней, или отъ верхней къ нижней и отъ передней къ задней, или обратно. Изъ чего заключаемъ, что предѣлъ какого ничесъ тѣла имѣетъ шокмо два протяженія; и оный есть то, что называется *поверхностію*.

5. Поверхности, какъ края или предѣлы простирательствъ опредѣленныхъ, также должны имѣть оныя. Поверхности простираются или отъ правой стороны къ лѣвой и отъ передней къ задней, или отъ правой къ лѣвой и отъ верхней къ нижней, или отъ верхней къ нижней и отъ передней къ задней, или обратно (2); посему и предѣлы ихъ, какъ содержащіяся между сими сторонами, должны простирались или отъ правой стороны къ лѣвой, или отъ передней къ задней, или отъ верхней къ нижней, или обратно. Изъ чего заключаемъ, что предѣлъ какой ничесъ поверхности имѣетъ шокмо одно протяженіе; и оный есть то, что называется *линією*.

4. Линія, какъ края или предѣлы поверхностей тѣла, равнымъ образомъ не могутъ быть безъ оныхъ. Но всякая линія имѣетъ шокмо одно протяженіе (3); чего ради предѣлы оной должны быть безъ всякаго протяженія и слѣдовательно безъ вся-

кой величины. Каждый таковой предѣлъ линіи есть по, что въ Геометріи называется *точкою*.

Примѣт. Длина, ширина и высота или толстота суть шѣ слова, коими обыкновенно означаютъ пропяхенія шѣлъ; чего ради говорится: всякое геометрическое шѣло, какъ и всякое естественное, имѣетъ длину, ширину и высоту или толстоту; всякая поверхность — длину и ширину, а всякая линія — шокмо длину.

5. Отсюда видно, что не болѣе можетъ быть какъ шокмо при рода пропяхенностей: линіи, поверхности и шѣла.

6. Наука, имѣющая предметомъ свойства сихъ пропяхенностей, есть *Геометрія*.

Чтобы яснѣе представить предметъ сей науки, рассмотримъ главные роды линій и поверхностей, какъ такихъ пропяхенностей, изъ коихъ ошъ первыхъ зависятъ образованіе другихъ, а ошъ сихъ послѣднихъ зависитъ образованіе самыхъ шѣлъ.

7. Линіи раздѣляются на два главные рода: на *прямыя* линіи и *кривыя*.

8. Когда двѣ точки одной линіи, лежа на двухъ точкахъ другой, дѣлають, что и самыя линіи лежать одна на другой: то каждая изъ оныхъ называется *прямою*. (*)

(*) Здѣсь наипаче надлежитъ замѣтить слова: *двѣ точки дѣлають*; ибо могутъ быть многія не-прямыя линіи, изъ коихъ одна, лежа двумя точками на двухъ точкахъ другой, вся лежитъ или совмѣщается съ сею другою. Но въ сихъ случаяхъ критическою такоюто совмѣщенія суть не двѣ точки, а многія. Такъ наприкладъ, когда двѣ точки дуги

Изъ сего опредѣленія происходятъ слѣдующія заключенія:

9. а.) Двѣ прямыя линіи взаимно пересѣкаются въ одной точкѣ.

Въ точкѣ потому, что предѣлъ линій есть точка (4); въ одной же потому, что положивъ болѣе, нежели въ одной, допустимъ, что прямая, лежа двумя точками на другой, не лежитъ вся на ней; что противно опредѣленію прямой линіи.

10. б.) Двѣ прямыя линіи не могутъ заключить собою опредѣленнаго пространства.

Если сіе возможно, то прямая, лежа двумя точками на другой, не лежитъ на ней; что также противно опредѣленію прямой линіи.

11. с.) Между двумя какими нѣсть точками токмо одна прямая проведена быть можетъ.

Ибо всякая другая прямая, лежащая на сихъ точкахъ, по опредѣленію прямой линіи, должна лежать на ней.

12. Когда прямая, положенная на двѣ точки данной линіи, лежитъ на ней токмо

круговой линіи положатся на двѣ точки другой дуги круговой линіи: то можетъ случиться, что первая дуга совмѣстится съ другою, а именно, когда центръ первой дуги упадетъ на центръ другой; но въ семъ случаѣ самое условіе, чтобы центръ одной дуги падалъ на центръ другой, показываетъ, что уже не двѣ, а три точки дѣлаютъ, что одна дуга совмѣщается съ другою. И такъ сіе опредѣленіе прямой линіи безъ всякаго сомнѣнія принято быть можетъ.

своими точками, но ни какою своею частию; то сія данная линія называется *кривою*.

13. Симъ опредѣленіемъ исключается изъ кривыхъ линій какъ совокупленіе прямыхъ съ прямыми, не сошпающимися той же прямой, такъ и кривыхъ съ прямыми. Первое изъ сихъ совокупленій, разсматриваемое какъ одна линія, называется *ломаною линіею*; а другое, разсматриваемое какъ одна линія, именуется *сбѣшанною линіею*.

14. Изъ свесенія сихъ опредѣленій съ опредѣленіемъ прямой линіи очевидно явствуетъ, что изъ всѣхъ линій, проведенныхъ отъ одной точки до другой, прямая есть кратчайшая.

Ибо изъ всѣхъ линій, лежащихъ на концахъ сей прямой, одна прямая съ нею совмѣщается (8); а всякая другая лежитъ на ней только своими точками, но ни какою своею частию (12 и 13); и пошому она, какъ находящаяся внѣ прямой и заключающая съ нею опредѣленное пространство, есть больше ея.

15. Поверхности, такъ какъ и линіи, раздѣляются на два главные рода: на прямые поверхности или плоскости и кривые поверхности.

16. Когда на какія нисетъ двѣ точки предложенной поверхности положенная прямая линія лежитъ вся на оной; то та предложенная поверхность называется *прямой поверхностію* или *плоскостію*.

Отсюда происходятъ слѣдующія заключенія:

17. а.) Прямая линія пересѣкаетъ плоскость только въ одной точкѣ.

Въ точкѣ потому, что предѣлъ линіи, какъ и всякой ея части, есть точка ($\frac{1}{4}$); въ одной же потому, что положивъ болѣе, нежели въ одной, допустимъ, что прямая линія, лежа на двухъ точкахъ плоскости, не лежитъ вся на ней; что противно опредѣленію плоскости.

18. б.) Плоскость, лежащая на трехъ точкахъ другой плоскости, не въ прямой линіи находящихся, вся лежитъ на сей другой плоскости.

Черт. 1.

Пусть плоскость PQ лежитъ на трехъ точкахъ A , B и C другой плоскости RS . Протяни чрезъ сія точки прямыя EF и GH ; оныя будутъ лежать на той и другой плоскости (18). Возми на сихъ линіяхъ какія вьнесъ точки K и L , M и N ; проведенныя прямыя KL и MN также будутъ лежать на той и другой плоскости (18); посему каждая точка сихъ линій и другихъ, подобно имъ проведенныхъ, будетъ находиться на той и другой плоскости; чего ради и самая плоскость PQ вся будетъ находиться на плоскости RS .

Изъ сего явствуетъ, что плоскости можно дать опредѣленіе подобное тому, какое дано прямой линіи, то есть: ежели три, не въ прямой линіи находящіяся, точки одной поверхности, лежа на трехъ такихъ же точкахъ другой, дѣлають, что и самыя поверхности лежатъ одна на другой; то каждая изъ сихъ поверхностей называется *прямой поверхностію или плоскостію*.

19. с.) Двѣ плоскости пересѣкаются въ одной точкѣ прямой линіи.

Въ линіи потому, что предѣлъ поверхности есть линія (5); въ одной же потому, что положить болѣе, нежели въ одной, допущимъ, что плоскость, лежа на трехъ, не въ прямой линіи находящихся, точкахъ, другой, не лежатъ вси на ней (10); наконецъ въ прямой потому, что линія, соединяющая какія нибудь двѣ точки сѣченія двухъ плоскостей, должна лежать на той и другой плоскости (16).

20. d.) Двѣ плоскости не могутъ заключить собою опредѣленнаго пространства.

Если сіе возможно, то плоскость, лежа на трехъ, не въ прямой линіи находящихся, точкахъ другой, не лежатъ вси на ней; что противно предъ симъ доказанному (10).

21. e.) Три плоскости также не могутъ заключить собою опредѣленнаго пространства; чему въ послѣдствіи полное изъясненіе представится.

22. Когда на какія нибудь три точки предложенной поверхности положенная плоскость лежитъ на оной только своими точками и линіями, но ни какою своею частію; то предложенная поверхность *кривою* называется.

23. Изъ сего и изъ члена 13-го явствуетъ, что такое суть *ломанныя* и *сгибанныя* поверхности.

24. Изъ линій и поверхностей кривыхъ, по простотѣ связей, занимаютъ первое мѣсто слѣдующія: изъ линій *крутовая*, а изъ поверхностей *лѣ*, которыя чрезъ посредство оной произведены быть могутъ, какъ

то: поверхность коническая, цилиндрическая и сферическая.

Черт. 2.

25. *Линія круговая* есть та, которая, лежа на плоскости, дѣлается равными всѣ прямыя (CA, CB, CD), исходящія до ней изъ одной точки (C) пространства, ею содержамаго. Сіе пространство *кругомъ* называется; точка же (C), изъ которой исходятъ равныя прямыя, *центромъ*, а сіи равныя (CA, CB, CD) *радіусами* именуются. Линія круговая обыкновенно называется *окружностію* круга.

Примѣч. Опредѣленія поверхностей: конической, цилиндрической и сферической, также опредѣленія самыхъ тѣлъ: конуса, цилиндра и сферы или шара читай въ членахъ 439, 449 и 504.

26. Послѣ сего исчисленія главныхъ родовъ линій и поверхностей, можемъ сказать, что настоящій предметъ Геометріи не въ иномъ чемъ состоитъ, какъ въ познаніи свойствъ, которыя имѣютъ мѣсто при взаимномъ сопряженіи на извѣстной поверхности протянутыхъ линій съ линіями, и поверхностей съ линіями и поверхностями.

27. Но въ семь предметъ Геометріи не полагается именно, какія линіи и на какой поверхности сопрягаются; также какія поверхности съ какими линіями и поверхностями въ сопряженіе входятъ: посему оный весьма обширенъ; и для того Геометрія раздѣляется: на *Геометрію первоначальную* и *Геометрію высшую*.

28. Въ Геометріи первоначальной разсматриваются только тѣ свойства, которыя мѣсто имѣть могутъ при взаимномъ

сопряжений на плоскости пропнутыхъ, прямыхъ и круговыхъ линий съ прямыми линиями, также прямыхъ и трехъ кругомъ образованныхъ поверхностей съ прямыми линиями и плоскостями.

Все же прочее, въ общемъ предметѣ Геометріи содержащееся, принадлежитъ къ Геометріи высшей.

29. Откуда явствуешь, что первоначальную Геометрію весьма прилично раздѣлишь на двѣ части, а именно: на сопряженіе протяннутыхъ на плоскости прямыхъ и круговыхъ линий съ прямыми линиями и на сопряженіе плоскостей и трехъ кругомъ образованныхъ поверхностей съ прямыми линиями и плоскостями. Но явно, что въ обѣ части входятъ по два предмета; посему первоначальная Геометрія естественно должна состоять изъ четырехъ слѣдующихъ книгъ:

Книга I. О свойствахъ, которыя имѣютъ мѣсто при взаимномъ сопряженіи на плоскости протяннутыхъ прямыхъ линий съ прямыми линиями.

Книга II. О свойствахъ, которыя имѣютъ мѣсто при взаимномъ сопряженіи круговой линии съ прямыми линиями.

Книга III. О свойствахъ, которыя имѣютъ мѣсто при взаимномъ сопряженіи плоскостей съ прямыми линиями и плоскостями.

Книга IV. О свойствахъ, которыя имѣютъ мѣсто при взаимномъ сопряженіи трехъ кругомъ образованныхъ поверхностей съ прямыми линиями и плоскостями.

30. Всѣ сія книги и слѣдовательно вся первоначальная Геометрія не болѣе перебу-
ють, какъ токмо трехъ началъ, кои суть:
правило наложенія, теорія пропорціональныхъ
величинъ, и теорія предположѣ. Сущность и упо-
требленіе сихъ началъ увидимъ въ послѣд-
ствіи.

31. Первое изъ сихъ началъ есть глав-
нѣйшій источникъ нашихъ въ Геометріи
познаній; и все, доселѣ предложенное, про-
изведено изъ оного; посему здѣсь замѣтимъ
различныя случаи, коимъ оно подвержено.
Линіи и поверхности одиѣ на другія и шѣ-
ла одиѣ въ другія положенныя, или совер-
шенно совмѣщаются, или одиѣ другія въ
себѣ содержатъ, или наконецъ сами въ дру-
гихъ содержатся; въ первомъ случаѣ оныя
линіи, поверхности и шѣла называются
одиѣ другими равными, въ другомъ одиѣ дру-
гихъ большими, и наконецъ въ третьемъ
одиѣ другихъ меньшими.

32. Въ доказательствѣ сего равенства
и большаго или меньшаго неравенства со-
стоятъ вся теорія Геометріи.

Доказательство же сіе иначе основа-
но на слѣдующихъ очевидныхъ истинахъ,
аксіомами называемыхъ:

1.) Величины равныя той же или рав-
нымъ суть и взаимно равны между собою.

2.) Цѣлая величина больше своей ча-
сти, или часть меньше цѣлой своей вели-
чины.

3.) Величина, которая ни больше, ни
меньше другой, есть равна сей другой.

4.) Если къ той же или къ равнымъ величинамъ приложены равныя или та же; то и цѣлыя равны.

5.) Если отъ той же или отъ равныхъ величинъ отняты равныя или та же; то и остатки равны.



КНИГА ПЕРВАЯ.

О свойствахъ, которыя имѣютъ мѣсто при взаимномъ сопряженіи на плоскости протянутыхъ прямыхъ линій съ прямыми линіями.



Въ сей книгѣ во первыхъ намъ представляется сопряженіе двухъ прямыхъ линій; откуда происходятъ углы: *прямые, острые и тупые*. Потомъ представляется сопряженіе трехъ прямыхъ линій, гдѣ имѣютъ мѣсто слѣдующіе два случая: двѣ какія ниестъ изъ трехъ на плоскости протянутыхъ прямыхъ, довольно продолженныя, или встрѣчаются по которую нибудь сторону или не встрѣчаются. Въ первомъ случаѣ сіи двѣ прямыя, сопряженныя претъею, заключаютъ опредѣленное пространство, *треугольникомъ* называемое; въ другомъ же оныя прямыя, сопряженныя претъею, всегда будутъ одна опъ другой въ равномъ разстояніи, то есть, *параллельными*. Чтобы заключить неопредѣленное пространство, содержимое двумя параллельными линіями и претъею прямою ихъ пересѣкающею, необходима четвертая прямая, тѣ же параллельныя линіи сопрягающая. Сія съ первою, параллельною пересѣкающею, также или встрѣчается по которую нибудь сторону или не встрѣчается; посему и здѣсь два случая имѣютъ мѣсто. Въ первомъ содержимое на пло-

скости сими линіями; пространство называе-
мъ *трапецією*, а въ другомъ *параллело-
граммѣ*. Отсюда, сверхъ сего, приобрета-
емъ понятіе вообще о четырехугольникахъ,
въ разсужденіи котораго трапеція и паралле-
лограмъ суть только частные случаи. И
такъ, непосредственно и естественно из-
слѣдованію нашему представляются слѣдую-
щіе предметы: *углы, треугольники, парал-
лельныя линіи и параллелограммы*, какъ
предметъ самоближайшій въ линіямъ парал-
лельнымъ и ведущій ко многимъ достопри-
мѣчательнымъ заключеніямъ, на коихъ из-
слѣдованіе и трапеціи и всякаго четырех-
угольника основано.

Послѣ сего изслѣдованію нашему пред-
ставляются пространства, происходящіе
отъ соображенія пяти, шести и такъ да-
лѣ прямыхъ линій, и кои, по числу сихъ
линій, *пятиугольниками, шестиугольниками*
и такъ далѣе, вообще же *многоугольниками*
называются. Сии многоугольники до беско-
нечности измѣняются могутъ, какъ къ ро-
дѣ, такъ и видѣ; и при томъ можно или со-
сѣмъ не касаться до вида ихъ или напаче
принимать оный въ разсужденіе; чего ради
къ сей книгѣ должны быть разсмотрѣны
еще два предмета: *многоугольники вообще и*
подобіе многоугольниковъ.

Но къ сему послѣднему предмету не
иначе приступить можно, какъ зная вѣрное
начало Геометріи (30) и способы приложе-
нія его къ прямымъ линіямъ и образован-
нымъ ими плоскостямъ; почему въ сію кни-
гу нужно ввести еще два предмета: *теорію*
величинъ пропорціональныхъ и приложение

оной къ прямымъ линіямъ и образованнымъ ими плоскостямъ.

И такъ первая книга Основаній Геометріи должна состоять изъ слѣдующихъ главъ:

- I. Объ углахъ.
- II. О треугольникахъ.
- III. О параллельныхъ линіяхъ.
- IV. О параллелограммахъ.
- V. О многоугольникахъ вообще.
- VI. О теоріи величинъ пропорціональныхъ.
- VII. О приложеніи оной къ прямымъ линіямъ и образованнымъ ими плоскостямъ.
- VIII. О подобіи многоугольниковъ.



КНИГИ ПЕРВОЙ ГЛАВА I.

О б ъ у г л а х ъ.



Черт. 3. 33. *Опредѣленіе I.* Когда двѣ прямыя линіи (AB и AC), на плоскости лежащія, встрѣчаются и не составляютъ той же прямой: то содержащееся между ними неопредѣленное пространство (BAC), котораго часть можно заключить прямою (DE), первыя соединяющею, называется *угломъ*, и каждая изъ первыхъ прямыхъ *сторонаю* оного именуется.

Черт. 4. 34. *Опредѣленіе II.* Когда прямая линія (CD) встрѣчается съ другою (AB) такъ, что дѣлаетъ съ нею по ту и другую сто-

рону углы равны (уг. $ДСА = \text{уг. } ДСВ$): то каждый изъ оныхъ угловъ называется *прямымъ*; а линия, дѣляющая съ другою углы равныя, именуется къ ней *перпендикулярною* или просто *перпендикуляромъ*.

55. Предложеніе I. (*). Величина *прямыхъ* угловъ есть постоянна, то есть, всѣ *прямые* углы равны между собою.

Пусть линіи CD и GH перпендикулярны къ AB и EF , каждая къ каждой; говорю, что уг. $ACD = \text{уг. } EGH$ и уг. $BCD = \text{уг. } FGH$.

Представимъ, что AB , сопряженная съ CD , положена на EF , сопряженную съ GH , такъ, что точка C падаетъ на G и AB на EF . Если CD не падетъ на GH : то пусть падаетъ такъ, какъ GI ; будетъ уг. $EGI = \text{уг. } FGI$, ибо уг. $ACD = \text{уг. } BCD$ по положенію. Но уг. $FGI < \text{уг. } FGH$ (51), и потому уг. $EGI (= \text{уг. } FGI) < \text{уг. } EGH (= \text{уг. } FGH)$, что невозможно; слѣдов. невозможно, чтобы CD не пала на GH и чтобы не былъ уг. $ACD = \text{уг. } EGH$ и уг. $BCD = \text{уг. } FGH$. И такъ величина *прямыхъ* угловъ есть постоянна.

Изъ сего происходитъ слѣдующее опредѣленіе:

36. Опредѣленіе III. Уголъ (FGI), который меньше *прямаго* (FGH), называется *острымъ*; а уголъ (EGI), который больше *прямаго* (EGH), именуется *тупымъ*.

(*) Сіе и другія безъ особенныхъ наименованій предложенія суть тѣ, кои въ каждой главѣ, по излагаемому въ ней предмету, непосредственно сами собою изслѣдованію представляются и кои сего ради *главными* называются.

57. *Присовок. 1.* (*) Отсюда явствуешь, что если прямая линия встрѣчается съ другою прямою такъ, что не дѣлаетъ по ту и другую сторону равныхъ угловъ: то меньшій изъ сихъ будетъ острый, а большій тупой, и оба вмѣстѣ составляютъ два прямыхъ.

58. *Присовок. 2.* Отсюда же явствуешь, что всѣ углы составляемые прямыми, лежащими на той же плоскости верутъ одной точкѣ, равны четиремъ прямымъ.

Черт. 5.

59. *Предложеніе II. С.* (**) Если двѣ прямыя (AB и CD) взаимно пересѣкаются: то содержащiе или противоположныя углы (AED и CEB или AEC и DEB) суть равны между собою.

Уг. $AED +$ уг. $AEC = 2$ пр. уг. и уг. $CEB +$ уг. $AEC = 2$ пр. уг. (57), почему уг. $AED +$ уг. $AEC =$ уг. $CEB +$ уг. AEC (55); откуда, по отнятіи общаго уг. AEC , заключишь, что уг. $AED =$ уг. CEB .

Также докажется, что уг. $AEC =$ уг. DEB .



(*) Подъ именемъ *Присовокупленій* разумѣются самоближайшія слѣдствія, происходящія изъ какого вѣдѣсть опредѣленія или предложенія.

(**) То есть слѣдствіе. Подъ именемъ *Слѣдствій* разумѣются такія предложенія, кои изъ предъидущихъ предложеній съ довольною удобностію произведены быть могутъ и кои, по предмету сихъ предложеній или по доказательству оныхъ, не посредственно представляются.

КНИГИ ПЕРВОЙ ГЛАВА II.

О треугольникахъ.



40. *Определение I.* Определенное на плоскости пространство (ABC), содержащее Черт. 6. три прямых линии, треугольникомъ называется; и каждая изъ сихъ прямыхъ, стороны оного именуется.

41. *Присовок.* Та изъ сторонъ, на которой представляемъ треугольникъ стоящимъ, основаниемъ оного называется.

42. *Определение II.* Треугольникъ, у котораго жъ три стороны равны, равносторонный именуется.

43. *Определение III.* Треугольникъ, у котораго только двѣ стороны равны, равнобедренный называется.

44. *Предложение I.* Если двѣ стороны Черт. 6. (AB и AC) одного треугольника (ABC) равны двумъ сторонамъ (DE и DF) другаго (DEF), каждая каждой, и уголъ (BAC) одного равенъ углу (EDF) другаго, а именно, которые содержатся между равныхъ сторонъ: то и основаніе (BC) одного будетъ равно основанію (EF) другаго, протіе углы (ABC и ACB) равны протіи угламъ (DEF и DFE), каждый каждому, и треугольникъ (ABC) треугольнику (DEF) совершенно равенъ.

Представляя, что треуг. ABC положенъ на треуг. DEF такъ, что точка A падаетъ на D и AB на DE ; поелику $AB=DE$, уг. $BAC=уг. EDF$ и $AC=DF$ по положенію: то падутъ точка B на E , AC на DF и точ-

ка C на F (31). И такъ осн. BC съ осн. EF , уг. ABC съ уг. DEF и уг. ACB съ уг. DFE совмѣщаются и слѣдов. равны между собою; чего ради самыя триуг. ABC и DEF , какъ совмѣщающіеся, также равны между собою (31).

45. *Присовок.* Отсюда слѣдуетъ, что триугольникъ по даннымъ двумъ сторонамъ и углу, между ими содержащемуся, совершенно опредѣляется; и потому по симъ даннымъ всегда составить бытъ можеть.

Черт. 9. Пусть даны линіи P и Q и уг. DCE ; на сторонахъ онаго возми $CD=P$ и $CE=Q$; по проведеніи прямой DE , получишь триуг. CDE , имѣющій стороны и уголъ между ими данные.

Черт. 7. 46. *Предложеніе II. Л. (*)* Если двѣ стороны (AB и AC) одного триугольника (ABC) равны двумъ сторонамъ (DE и DF) другаго триугольника (DEF), каждая каждой, но уголъ (BAC) одного больше угла (EDF) другаго, а именно, которые содержатся между равныхъ сторонъ: то и основаніе (BC) триугольника, въ которомъ больший уголъ, будетъ больше основанія (EF) другаго.

Представимъ, что триуг. ABC положенъ на триуг. DEF такъ, что точка A падаетъ на D и AB на DE ; точка B падетъ на E и AC въ плоскости триуг-ка DEF (31), ибо $AB=DE$ и уг. $BAC >$ уг. EDF

(*) То есть лемма. Подъ именемъ Леммы разумѣются такія предложенія, безъ помощи коихъ ни главныхъ предложеній, ни представляющихъ изъ нихъ слѣдствій доказать не можно.

по положенію. Пусть AC падаетъ, какъ DC , ей равная; прямая $EG=BC$ можетъ падать или на EF , или выше, или ниже оной.

1) Пусть $EG (=BC)$ падаетъ на EF ; Но 1. явлено, что $EG (=BC) > EF$.

2) Пусть $EG (=BC)$ падаетъ выше EF Но 2. и пресѣкаетъ DF въ точкѣ H ; проводимъ FG , найдемъ, что $EH+HF > EF$ и $DH+HG > DG$ (14); почему $EH+HG+DH+HF > EF+DG$, или все то же, $EG+DF > EF+DG$, то есть, $EG (=BC) > EF$, ибо $DF (=AC) = DG$ по положенію.

3) Наконецъ пусть $EG (=BC)$ падаетъ ниже EF и EF продолженный пересѣкается съ DC въ точкѣ H ; проводимъ FG найдемъ, что $EG+CH > EF+FH$ и $FH+HD > DF$ (14); почему $EG+FH+GH+HD > EF+FH+DF$, или все то же, $EG+DG > EF+DF$, то есть, $EG (=BC) > EF$, ибо $DF (=AC) = DG$ по положенію.

47. Предложеніе III. Если двѣ стороны (AB и AC) одного треугольника (ABC) равны двумъ сторонамъ (DE и DF) другаго треугольника (DEF), каждая каждой, и основаніе (BC) одное равно основанію (EF) другаго: то углы, противъ равныхъ сторонъ лежащіе, будутъ равны между собою, и треугольникъ (ABC) треугольнику (DEF) совершенно равенъ. Черт. 6.

Возмемъ углы BAC и EDF , лежащіе противъ равныхъ основаній BC и EF ; оные, говорю, равны между собою. Ибо если не равны, то основаніе BC не равно основанію EF (46); что противно положенію. И такъ уг. $BAC =$ уг. EDF , и треуг. ABC треуг-ку DEF совершенно равенъ (44); слѣдов. и др.

48. *Присовок. 1.* Отсюда явствуешь, что треугольник по трем сторонам совершенно определяется; и потому по данным трем прямым, из коих каждая двѣ, имѣетъ вѣдныи, больше остальной, оный всегда составленъ быть можетъ.

Черт. 8.

Пусть даны таковыя три прямыя A , B и C . Проведи неопредѣленную прямую DE и возьми на оной $DF=A$, $FC=B$ и $CH=C$; потомъ изъ F и C радиусами DF и CH опиши вкругъ линіи DIK и HIK , коихъ въ точкѣ I взаимно пресекутся; ибо въ противномъ случаѣ двѣ изъ данныхъ линій будутъ или равны или меньше остальной. Проведи IF и IC , и будешь имѣть требуемый треуг. FCI , въ коемъ $IF=DF=A$, $FC=B$ и $IC=CH=C$.

49. *Присовокъ 2.* Если изъ трехъ данныхъ прямыхъ будутъ двѣ равны между собою, то треугольникъ составится равнобедренный; а если всѣ три равны, то равносторонній.

50. *Предложеніе IV. С.* При данной прямой (AB) и при данной на ней точкѣ (A) составишь уголъ, равный данному (DCE).

На сторонахъ даннаго угла взявъ какія ниесешь точки D и E , проводи прямую DE и изъ трехъ, равныхъ, прямыхъ CD , CE и DE , составь треуг. AFG (48) такъ, чтобы были $AF=CD$, $AG=CE$ и $FG=DE$; чрезъ что и будешь имѣть уг. $FAG=уг. DCE$ (47).

Черт. 10.

51. *Предложеніе V. С.* На прямой (AB) изъ данной на ней точки (C) поставишь перпендикуляръ.

Взявъ $CE=CD$, составь на DE равносторонній треуг. DEF (49) и проводи пря-

мую CF ; сія CF будетъ перпендикулярна къ AB .

Въ треуг-хъ DCF и ECF , $CD=CE$, $DF=EF$ по строенію и CF общая; чего ради треуг. $DCF=$ треуг. ECF и уг. $DCF=$ уг. ECF (47); слѣдов. CF есть перпендикулярна къ AB (54).

52. *Присовок.* На прямой изъ данной точки болѣе одного перпендикуляра поспавить не можно; ибо если положимъ сіе возможнымъ, то допустимъ противное доказанному о равенствѣ прямыхъ угловъ (55).

53. *Предложеніе VI.* А и С. (*) Данный уголъ (BAC) раздѣлитъ пополамъ.

Черт. 11.

На сторонахъ даннаго угла возми $AD=AE$, проведи прямую DE , на сей составъ равносторонный треуг. DEF (49) и проведи прямую AF ; сія AF раздѣлитъ уголъ BAC пополамъ.

Въ треуг-хъ ADF и AEF , $AD=AE$, $DF=EF$ по строенію и AF общая; чего ради треуг. $ADF=$ треуг. AEF и уг. $DAF=$ уг. EAF (47).

Черт. 12.

54. *Предложеніе VII.* С. Углы (BAC и ABC), лежащіе противъ равныхъ сторонъ (BC и AC) равнобедреннаго треугольника ($СAB$), суть равны между собою.

Уг. ACB раздѣли пополамъ (53); получишь два треуг. ACD и BCD , кои, по велику $AC=BC$ по положенію, CD общая и уг. $ACD=$ уг. BCD по строенію; суть равны между собою (44); чего ради уг. $BAC=$ уг. ABC .

55. *Присовок.* Отсюда явствуетъ, что въ равносторонномъ треугольникѣ всѣ три угла равны между собою.

(*) То есть лемма и вмѣстѣ слѣдствіе.

Черт. 13.

56. Предложеніе VIII. О. VII. (*) Если два угла (ABC и ACB) треугольника (ABC) равны между собою: то и стороны (AC и AB), имъ равныиъ угламъ противолежащія, суть также равны между собою.

Если AB и AC не равны: то опъ болъшей изъ нихъ, какъ AB , возми $BD=AC$ и проводи прямую CD . Въ треуг-хъ ACB и DBC , $AC=BD$ по строенію, BC общая и уг. $ACB=уг. DBC$ по положенію; чего ради треуг. $ACB=треуг. DBC$ (44), то есть, цѣлое равно своей части; что не возможно. Слѣдов. также не возможно, чтобы AC и AB были не равны между собою.

57. Присовокъ. Откуда слѣдуетъ, что если въ треугольникъ всѣ при угла равны между собою, то оный есть равносторонній.

Черт. 11.

58. Предложеніе IX. А и С. Данную прямую линію (AB) раздѣлитъ пополамъ.

Составъ на AB равносторонній треуг. ABC (49) и раздѣли уголъ ACB пополамъ (55) прямою CD ; она CD раздѣлитъ и AB въ точкѣ D пополамъ.

Въ треуг-хъ ACD и BCD , $AC=BC$ по строенію, CD общая и уг. $ACD=уг. BCD$; чего ради треуг. $ACD=треуг. BCD$ и $AD=BD$ (44).

Черт. 14.

59. Предложеніе X. О. V. На прямую (AB) изъ данной точки (C), по которую ни-

(*) То есть предложеніе обратное VII-му. Симв именемъ называется такое предложеніе, которое съ предъидущимъ, ему соотвѣствующимъ, состоитъ во взаимной противоположности.

будь сторонею ея находящейся, опустить перпендикуляръ.

Возьми какую нибудь точку D по другую сторону линии AB , и изъ C , радіусомъ CD , опиши кругъ. линію MDN ; продолжи AB , если нужно, до пресѣченія съ нею въ точкахъ E и F ; попомни раздѣли EF въ точкѣ S пополамъ (58) и проводи CS : она CS будетъ перпендикулярна къ AB .

По проведеніи CE и CF найдемъ, что въ треуг-хъ CSE и CSF , $ES=FS$ по строенію, $CS=CS$, какъ радіусы одного круга, и CS обща; посему треуг. $CSE=$ треуг. CSF и уг. $CSE=$ уг. CSF (47); слѣдов. CS есть перпендикулярна къ AB (34).

60. Предложеніе XI. Л. Во всякомъ тре-Черш. 15.
угольнике (ABC) внѣшній уголъ (ACD), составленный одною изъ сторонъ (AC) съ продолженіемъ (CB) другой (BC), больше каждою изъ внутреннихъ угловъ (BAC и ABC), ему противоположныхъ.

Черезъ точку E средину AC проводи BE и изъ продолженія ея взявъ $EF=BE$, проводи прямую CF ; усмотришь, что $AE=EC$ и $BE=EF$ по строенію, уг. $AEB=$ уг. FEC (59); почему въ треуг-хъ AEB и CEF уг. $BAE=$ уг. ECF (44); но уг. $ACD>$ уг. ECF ; слѣдовательно онъ больше и равнаго ему уг. BAE .

По продолженіи AC до G и сдѣланіи подобнаго строенія, также докажемъ, что внѣшній уг. $BCG>$ уг. ABC ; но уг. $BCG=$ уг. ACD (39); посему уг. ACD больше и уг. ABC .

61. Присовокъ. 1. Отсюда имѣемъ доказательство, что изъ точки взятой внѣшней прямой, на одну болѣе одного перпендикуляра опустить не можно; ибо по-

должны пропущенное, должны будемъ допустить, что въ треугольникъ внѣшній уголъ равенъ внутреннему противоположному; что не возможно.

62. *Примовк. 2.* Отсюда же явствуется, что въ треугольникъ только одинъ прямой или тупой уголъ быть можетъ; прочіежъ два непременно острые.

Изъ сего происходитъ слѣдующее опредѣленіе:

63. *Опредѣленіе IV.* Треугольникъ называется *остроугольнымъ*, когда всѣ углы онаго суть острые; *прямоугольнымъ*, когда одинъ изъ угловъ его есть прямой; и *тупоугольнымъ*, когда одинъ изъ угловъ его есть тупой.

Примѣч. Въ прямоугольномъ треугольникѣ сторона, лежащая противъ прямого угла, гипотенузою называется, а прочія катетами.

Черт. 16. 64. *Предложеніе XII. А.* Во всякомъ треугольникѣ (ABC) большая сторона лежитъ противъ большаго угла.

Пусть уг. $ABC >$ уг. ACB ; говорю, что $AC > AB$. Составь уг. $CBD =$ уг. ACB (50) и проводи BD , будетъ $BD = CD$ (56); но $AD + BD > AB$ (14); чего ради и $AC (= AD + BD) > AB$.

65. *Примовк. 1.* Отсюда слѣдуетъ, что изъ всѣхъ прямыхъ, которыя отъ какой нибудь точки до прямой линии провести можно, наименьшая есть та, которая къ ней перпендикулярна; а изъ другихъ меньшая есть та, которая ближе къ перпендикулярной, чѣмъ бы ея другія издали по одну или по ту и другую сторону оной.

66. *Примовк. 2.* А изъ сего явствуется, что отъ данной точки до прямой линии не

болѣе, какъ токмо двѣ равныя прямыя провести можно.

67. *Присовокъ 5.* Перпендикуляръ, опущенный изъ вершины треугольника на его основаніе, какъ меньшій изъ всѣхъ прямыхъ отъ вершины до основанія проведенныхъ (66), за высоту онаго треугольника приемлется.

68. Предложеніе XIII. Если двѣ стороны (AB и AC) одного треугольника (ABC) равны двумъ сторонамъ (DE и DF) другаго (DEF), каждая каждой, и уголъ (ABC) одного равенъ углу (DEF) другаго, а именно, которые лежатъ не между, но противъ которыхъ нѣсть равныхъ сторонъ, и притомъ каждый изъ остальныхъ угловъ (ACB и DFE), лежащихъ противъ другихъ равныхъ сторонъ, или меньше, или больше прямого, или же одинъ изъ нихъ прямой: то и осталая сторона (BC) одного треугольника равна остальной сторонѣ (EF) другаго, проіе углы (ACB и BAC) равны проіимъ угламъ (DFE и EDF), каждый каждому, и треугольникъ (ABC) треугольнику (DEF) совершенно равенъ.

Если стороны BC и EF не равны между собою: то отъ большей, какъ BC, возми $BC = EF$ и проводи прямую AC; найдешь, что $\text{треуг. } ABC = \text{треуг. } DEF$ (44); ибо въ нихъ $BC = EF$ по строенію, $AB = DE$ и уг. $ABC = \text{уг. } DEF$ по положенію; чего ради уг. $ACB = \text{уг. } DFE$ и $AC (=DF) = AC$.

Но когда углы ACB и DFE ($= \text{уг. } ACB$) No 1. острые (No 1), то въ $\text{треуг.-кѣ } ABC$, уг. ACB будетъ тупый (57) и $AC > AB$ (64); а когда No 2. тѣ же углы тупые (No 2), то уг. ACB бу-

№ 3.

дети острый и $AC < AG$; что противно доказанному. Равнымъ образомъ, когда уг. ACB есть прямой (№ 3), то въ треугольн. ACG будетъ $AC < AG$ (64); а когда уг. DFE ($=$ уг. ACB) есть прямой, то уг. ACG будетъ прямой же (54) и $AC > AG$; что также противно доказанному.

И такъ во всѣхъ случаяхъ не возможно, чтобы стороны BC и EF были не равны между собою; слѣдов. и пром. (44).

69. *Примовок. 1.* Откуда слѣдуетъ, что если двѣ стороны одного прямоугольнаго треугольника, а именно гипотенуза и одинъ изъ катетовъ, равны двумъ иاکовымъ сторонамъ другаго, каждая каждой: то сіи треугольники во всѣхъ прочихъ частяхъ всегда равны между собою.

70. *Примовок. 2.* Отсюда же слѣдуетъ, что треугольникъ по даннымъ двумъ сторонамъ и углу, который долженъ лежать противъ одной изъ нихъ, совершенно опредѣляется; и поному по симъ даннымъ оный всегда составленъ быть можетъ.

Черт. 13.

Пусть даны двѣ прямыя A и B и уг. DCE , который въ составленномъ треугольникѣ долженъ лежать противъ стороны, равной B . Изъ сихъ прямыхъ A можетъ быть больше или меньше B ; поему

№ 1.

1) Пусть A меньше B ; отъ стороны даннаго угла возми $CD = A$, изъ D радиусомъ $DF = B$ опиши кругъ, линію FGI и проведи прямую DG : получишь требуемый треуг. DCG , въ коемъ $CD = A$, $DG = DF = B$ и данный уг. DCE , лежацій противъ $DC = B$.

№ 2.

2) Пусть A больше B ; вопросъ имѣеть мѣсто только тогда, когда B будетъ не мень-

ше перпендикуляра DH , опущеннаго изъ конца прямой $CD=A$ на другую сторону CE даннаго угла DCE (85). И такъ если $B=DN$, то треуг. DCN будетъ требуемый; если же B больше DN , то кругъ, линія FCI , описанная радіусомъ $=B$, пресѣчетъ CE въ C и I и получится два треуг-ка DCG и DCI , кои равно могутъ удовлетворять рѣшенію вопроса; но когда предназначимъ родъ угла, лежащаго противъ большей стороны $CD=A$: то вопросъ, какъ и въ первомъ случаѣ, будетъ имѣть одно рѣшеніе.

71. Предложеніе XIV. Если два угла Черт. 18.
(ABC и ACB) одного треугольника (ABC) равны двумъ угламъ (DEF и DFE) другаго (DEF), каждый каждому, и одна сторона одного равна одной сторонѣ другаго, а именно, которая или суть при равныхъ углахъ (какъ BC и EF), или лежатъ противъ оныхъ (какъ AB и DE): то и прогיא стороны одного будутъ равны прогיא сторонѣ другаго, каждая каждой, и остальной уголъ (BAC) равенъ остальному (EDF).

1) Въ первомъ случаѣ, если AB не равна DE , отъ большей AB возми $BC=DE$ и проведи прямую CG ; усмотришь, что $BC=DE$ по строенію, $BC=EF$ и уг. $ABC=$ уг. DEF по положенію; чего ради въ треуг-хъ GBC и DEF , уг. $BCG=$ уг. EFD ($=$ уг. ACB) (44); что не возможно. Слѣдов. $AB=DE$, $AC=DF$ и уг. $BAC=$ уг. EDF (44).

2) Въ другомъ случаѣ, если BC не равна EF , отъ большей BC возми $BH=EF$ и проведи прямую HN ; найдешь, что въ треуг-хъ AHN и DEF , $BH=EF$ по строенію, $AB=DE$ и уг. $ABC=$ уг. DEF положе-

нію; почему уг. $AHB (= \text{уг. } DFE) = \text{уг. } ACB$ (44); что не возможно (во). Слѣдов. $BC = EF$, $AC = DF$ и уг. $BAC = \text{уг. } EDF$ (44).

72. *Присовок.* Отсюда слѣдуетъ, что треугольникъ по даннымъ двумъ угламъ и сторонѣ совершенно опредѣляется; и потому по симъ даннымъ всегда составленъ быть можетъ; что въ слѣдующей главѣ и показано будетъ.

КНИГИ ПЕРВОЙ ГЛАВА III.

О параллельныхъ линіяхъ.

Черт. 20.

73. *Опредѣленіе.* Двѣ прямыя (AB и CD), на той же плоскости лежащія, называющіяся *параллельными*, когда оныя ни по какую сторону не встрѣчаются, сколько бы далече продолжены ни были.

74. *Предложеніе I.* Если на двѣ прямыя (AB и CD) надетъ третья прямая (EF) и дѣлаетъ внутренніе углы (AGH и GHD), накрестъ лежащіе, взаимно равные, или уголъ внѣшній (EGB) равный внутреннему противолежащему (END), или два внутренніе угла (BGH и GHD), по одну сторону той прямой лежащіе, равные двумъ прямымъ: то оныя прямыя будутъ параллельны.

1) Если AB не параллельна CD , когда уг. $AGH = \text{уг. } GHD$: то AB и CD , доволно продолженныя, гдѣ ниеснѣ встрѣтятся. Пусть встрѣтятся въ точкѣ I ; будетъ уг.

$\angle GH > \angle HD$ (60); что противно положенію. Слѣдов. AB и CD суть параллельны.

2) Когда $\text{уг. } ECB = \text{уг. } END$, то $\text{уг. } AGH (= \text{уг. } EGB) = \text{уг. } END$ и слѣдов. AB , по первой части, параллельна CD .

3) Наконецъ, когда $\text{уг. } BGH + \text{уг. } GHD = 2 \text{ п. уг.}$; то, поелику также $\text{уг. } BGH + \text{уг. } AGH = 2 \text{ п. уг.}$ (57); будетъ $\text{уг. } BGH + \text{уг. } GHD = \text{уг. } BGH + \text{уг. } AGH$ и по отнятіи общаго $\text{уг. } BGH$ останется $\text{уг. } GHD = \text{уг. } AGH$; слѣдовательно и проч.

75. Предложеніе II. С. Черезъ точку (С), Черт. 21.
по которую ииестъ сторону данной прямой (AB) лежащую, провести параллельную сей прямой.

Взявъ на AB какую ииестъ точку D , проводи прямую CD и, при точкѣ C линіи CD составивъ $\text{уг. } DCE = \text{уг. } BDC$ (50), продолжи EC до F ; прямая EF будетъ параллельна AB (74).

76. Предложеніе III. А. Когда двѣ прямыя линіи (AB и CD) пресѣкаются перетѣсю Черт. 22.
(AC) тако, что по одну ея сторону дѣлаютъ еѣ цѣло внутренніе углы (BAC и ACD), кои, взявъ взятыя, менше двухъ прилжхъ: то оныя двѣ прямыя, довольно продолженныя по ту же сторону, взаимно встрѣгаются.

Предложеніе сіе для большей ясности можно раздѣлять на три случая:

1) Пусть одна изъ линій CD дѣлаеть No 1.
съ AC уголъ прямой, а другая AB острый. Изъ точки A проводи AE перпендикулярную CD (75) и возми $\text{уг. } BAE$ столько разъ, чтобы оный превзошелъ прямой $\text{уг. } EAC$ (50); пусть таковой уголъ есть $\text{уг. } EAF$. На AC , продол-

женной въ C , возьми $CH = HI = AC$ столько разъ, сколько взяли уг. BAE , и изъ точекъ H , I , проводи HK , IL параллельны той же CD . Неопредѣленные пространства $EACD$, $DCHK$, $HKIL$, бытъ положены одно на другое, совмѣстятся, и потому каждое одно другому равно (51); посему неопредѣленное пространство $EACD$ составляетъ такую же часть неопредѣленного пространства $EAIL$, какую уголъ BAE угла BAF . Но неопредѣленное пространство $EAIL$, имѣя съ неопредѣленнымъ пространствомъ BAF общую сторону AE и общее начало A , всегда заключается въ немъ и потому его меньше (51); слѣдов. и частное неопредѣленное пространство $EACD$ столько же есть меньше частнаго неопредѣленного пространства BAE ; всего ради прямая AB и CD , довольно продолженныя, должны необходимо встрѣниться; ибо въ противномъ случаѣ пространство BAE всегда заключалось бы въ пространство $EACD$ и слѣдов. было бы онаго меньше (51); что противно доказанному.

№ 2. 2) Пусть обѣ прямая AB и CD дѣлають съ AC углы острые. На AC изъ точки C поставь перпендикуляръ CE (51); оный, по доказанному въ первомъ случаѣ, встрѣнится съ AB въ нѣкоторой точкѣ E ; и слѣдов. CD , заключающаяся въ опредѣленномъ пространствѣ ACE , бывъ продолжена, пересѣчетъ AB .

№ 3. 3) Наконецъ пусть AB дѣлаеть съ AC уголъ острый, а съ CD тупой. Черезъ точку A проводи AE параллельную CD (75); раздѣляя AC въ точкѣ F пополамъ (58), на продолженную CD опусти перпендикуляръ FG (59)

и продолженія его въ противоположную сторону до пересѣченія съ AB и AE въ точкахъ H и I .

Въ треугольн. AFI и CFG , $AF=FC$, уг. $BAF=$ уг. FCG по строению и уг. $AFI=$ уг. CFG (59); посему уг. AIF ($=$ уг. CGF) $=$ п. уг. (71) и уг. BHG ($=$ уг. AHI) есть острый (62). И такъ изъ двухъ прямыхъ BH и DC , пересѣченныхъ третьей IC , BH дѣлаетъ съ нею уголъ острый, а DC прямой; чего ради сія двѣ прямыя, довольно продолженныя, по первому случаю, необходимо встрѣятся.

77. Предложеніе IV. Если на двѣ параллельныя (AB и CD) падаетъ третья прямая (EF); то дѣлаетъ внутренніе углы (AGH и GHD), накрестъ лежащіе, взаимно равными, или уголъ внешний (EGB) равнымъ внутреннему противоположному (END), или два внутренніе (BGH и GHD), по одну сторону одной прямой лежащіе, равными двумя прямымъ. Черт. 20.

1) Если уг. AGH не равенъ уг. GHD , то пусть уг. $AGH >$ уг. GHD ; прибавъ къ обоимъ уг. BGH , найдешь, что уг. $AGH +$ уг. $BGH >$ уг. $BGH +$ уг. GHD ; но уг. $AGH +$ уг. $BGH =$ 2 п. уг. (57); почему уг. $BGH +$ уг. $GHD <$ 2 п. уг. и AB съ CD должны встрѣиться (76); что противоположно положенію; слѣдов. уг. $AGH =$ уг. GHD .

2) По первой части уг. $AGH =$ уг. GHD ; но уг. $AGH =$ уг. BGE (59); чего ради уг. $BGE =$ уг. GHD .

3) По первой же части уг. $AGH =$ уг. GHD ; прибавъ къ нимъ уг. BGH , найдешь, что уг. $AGH +$ уг. $BGH =$ уг. $BGH +$ уг. GHD ; но уг. $AGH +$ уг. $BGH =$ 2 п. уг. (59); слѣдов. и уг. $BGH +$ уг. $GHD =$ 2 п. уг.

78. *Присовок. 1.* Отсюда слѣдуетъ, что чрезъ точку, по которую нибудь сторону данной прямой лежащую, болѣе одной, ей параллельной, провести не можно.

79. *Присовок. 2.* Отсюда также слѣдуетъ, что прямая, пресѣкающая двѣ параллельныя, если къ одной изъ нихъ перпендикулярна: то она перпендикулярна и къ другой.

80. *Присовок. 3.* Отсюда же имѣемъ средство исполнить то, что предположено было сдѣлать въ присовокупленіи къ предложенію XIV-му главы II-й (72).

Черт. 23. Пусть даны прямая C и два угла A и B , кои, вмѣстѣ взятые, меньше двухъ прямыхъ; и пусть требуется по симъ даннымъ составить треугольникъ, который бы имѣлъ одну прямую сторону и углы, равные даннымъ, или оба при ней, или одинъ изъ нихъ при ней, а другой противъ оной.

№ 1. 1) На одной изъ сторонъ угла A возьми $AD=C$ и на ней при точкѣ D составь уг. $ADE=$ уг. B (56); AE и DE , продолженные, встрѣтясь въ какой нибудь точкѣ E (76); отъ чего и получишь требуемый треуг. ADE .

№ 2. 2) На одной изъ сторонъ угла A возьми $AD=C$ и изъ D проведи DE , параллельную другой сторонѣ тогоже угла A (75); потомъ на ней при точкѣ D составь уг. $EDF=$ уг. B (56); прямая AF и DE , продолженные, встрѣтясь въ какой нибудь точкѣ F (76); почему, какъ и прежде, получишь требуемый треуг. ADF , въ коемъ $AD=C$ по строенію, уг. $DAF=$ уг. A по положенію и уг. $AFD=$ уг. $EDF=B$ (77).

81. Предложеніе V. С. Во всякомъ тре- Черт. 15.
угольнике (ABC) внешний уголъ (ACD) ра-
венъ двумъ внутреннимъ (ABC и BAC), кои
не прилежатъ къ нему; и три угла треу-
гольника, взятыя, равны двумъ пря-
мымъ.

Проведи CF перпендикулярную AB ; усмотришь,
что уг. $FCD =$ уг. ABC и уг. $ACF =$ уг. BAC
(77); почему уг. $ACD =$ уг. $ABC +$ уг. BAC ; по-
тому, придавъ къ симъ угламъ общій уг. ACB ,
получишь уг. $ABC +$ уг. $BAC +$ уг. $ACB (=$ уг.
 $ACD +$ уг. $ACB) = 2$ п. уг. (57).

82. Присовок. 1. Откуда явствуется, что
если два угла одного треугольника равны
двумъ угламъ другого треугольника, или вмѣ-
стѣ, или каждый каждому: то будетъ и ос-
тальный уголъ равенъ остальному.

83. Присовок. 2. Отсюда также явству-
ется, что если въ двухъ равнобедренныхъ
треугольникахъ уголъ одного равенъ углу
другого: то и остальные углы будутъ вза-
имно равны, каждый каждому.

84. Присовок. 3. Отсюда же явствуется,
что въ равносѣсторонномъ треугольникѣ ка-
ждый уголъ есть третья часть двухъ пря-
мыхъ, или двѣ трети одного прямого угла.

85. Присовок. 4. А изъ сего имѣемъ средство
дѣлать прямой уголъ на три равныя части.

На сторонѣ BC прямого угла ABC со- Черт. 24.
ставъ равносѣсторонный треуг. BCE (49) и
уг. CBE прямою BE раздѣли пополамъ (55);
найдешь, что уг. $CBE =$ уг. $DBE = ABD$ (84).

86. Предложеніе VI. С. Если двѣ встрѣ- Черт. 25.
гающіяся прямыя (AB и AC) будутъ парал-
лельны другой двумъ, по той же сторону
встрѣгающимся прямымъ (DE и DF): то

содержимые или углы (BAC и EDF) будут равны между собою.

Продолжи DE до пересечения съ AC въ точкѣ G ; найдешь, что уг. ($EDF = \text{уг. } EGC$) $= \text{уг. } BAC$ (77).

Черт. 26. 87. Предложеніе VII. Прямые (AB и CD), параллельныя той же прямой (EF), суть также и между собою параллельны.

Проведи какъ ввѣсть прямую GH , пересѣкающую AB , EF и CD въ точкахъ I , K и L ; усмотришь, что уг. $GIB (= \text{уг. } GKF) = \text{уг. } GLD$ (77); слѣдов. AB есть параллельна CD (74).

КНИГИ ПЕРВОЙ ГЛАВА IV.

О параллелограммахъ.

Черт. 27. 88. Опредѣленіе I. Опредѣленное на плоскости пространство ($ABCD$), содержимое четырьмя прямыми линіями (AB , BC , CD и DA), вообще *четыреугольникомъ* называется, и каждая изъ сихъ прямыхъ *сторонаю* оного именуется.

89. Присовок. 1. Та изъ сторонъ, на которой представляемъ *четыреугольникъ* стоящимъ, *основаніемъ* его называется.

90. Присовок. 2. Прямая (AC), сопрягающая вершины двухъ противоположащихъ угловъ (BAD и BCD) *четыреугольника*, *диагоналію* его именуется.

Черт. 53. 91. Опредѣленіе II. Четыреугольникъ ($ABCD$), у котораго изъ противоположащихъ сторонъ, двѣ только (AB и CD) параллельны между собою, называется *трапеціею*; и когда одна изъ непараллельныхъ сторонъ

перпендикулярна къ параллельнымъ, то прямоугольной именуется.

92. *Опредѣленіе III.* Четыреугольникъ ($ABCD$), у котораго каждыя противоположащія двѣ стороны (AB , CD и AD , BC) параллельны между собою, называется *параллелограммомъ*. Черт. 27.

93. *Опредѣленіе IV.* Параллелограммъ, у котораго всѣ углы прямые, именуется *прямоугольникомъ*.

94. *Предложеніе I. Л.* Въ параллелограммѣ какѡ противоположащія стороны, такѡ и противоположащіе углы, суть равны между собою.

Въ игр-мѣ $ABCD$ проведи діагональ AC ; Черт. 27. усмотришь, что въ треуг-хъ ABC и ADC , уг. $BAC = \text{уг.} ACD$, уг. $ACB = \text{уг.} CAD$ (77) и AC общая; почему $AB = CD$, $BC = AD$ и уг. $ABC = \text{уг.} ADC$ (71); поелику же уг. $BAC = \text{уг.} ACD$ и уг. $ACB = \text{уг.} CAD$: то будешь также и уг. $BAD = \text{уг.} BCD$.

95. *Присовок. 1.* Откуда явствуешь, что параллелограммъ діагоналію своею дѣлится пополамъ.

96. *Присовок. 2.* Отсюда же явствуешь, что всѣ перпендикуляры и всѣ прямые, между собою параллельно проведенныя опъ одной изъ параллельныхъ линий до другой, суть равны между собою.

Изъ сего происходятъ слѣдующія два опредѣленія:

97. *Опредѣленіе V.* Параллелограммъ, у котораго всѣ стороны равны между собою, называется *ромбомъ*.

98. *Опредѣленіе VI.* Прямоугольникъ, у котораго всѣ стороны равны между собою, именуется *квадратомъ*.

99. *Присовок.* Перпендикуляръ, опущенный изъ какой нибудь точки стороны параллелограмма на противоположащую ей сторону, основаніемъ именуемую, за высоту онаго приемлется.

100. *Предложеніе II.* С. Если на одной изъ сторонъ угла (BAC) возмущены линии равныхъ части (AD, DE, EF) и изъ концы ихъ проведутся взаимно параллельныя прямыя (DI, EK, FL), пресѣкающія другую того угла сторону; то сими параллельными на сей другой сторонѣ насѣкутся равнолинейныя части (AI, IK, KL).

Изъ точекъ I, K , проводи IM, KN , прямыя AB (75); усмотришь, что четырехугольники EI, FK , суть параллелограммы (92) и $IM = DE, KN = EF$ (94); почему въ треугольн. ADI, IMK, KNL , имѣющихъ $AD = IM = KN$, уг. $DAI =$ уг. $MIK =$ уг. NKL и уг. $AID =$ уг. $IKM =$ уг. KLN (77), суть $AI = IK = KL$ (71).

101. *Присовок. 1.* Отсюда явствуетъ, что EK, FL , прямыя DI , во столько разъ будутъ больше ея, во сколько разъ возмущенъ AK, AF , больше AD .

Въ треугольн. $ADI, IMK, KNL, DI = MK = NL$ (71) и $DI = EM, EK = FN$ (94); чего ради $EK = 2 DI, FL = 3 DI$, и такъ далѣе.

102. *Присовок. 2.* Отсюда же имѣемъ средство дѣлить данную прямую на сколько нибудь равныхъ частей, или взять какую нибудь частную величину оной.

Черт. 29. Пусть дана прямая AB ; при точкѣ A подъ какимъ нибудь угломъ, проводи прямую AC (50) и на ней возьми столько равныхъ величинъ AD, DE, EF , на сколько частей хочешь раздѣлять AB ; потомъ проводи прямую FB и

ей пр-ныя EK, DL ; точки K, L , и опредѣлить требуемыя части или частную величину одной AB (100).

103. Предложеніе III. 1-е О. I. Когда въ четырехугольникѣ ($ABCD$) противолежащія стороны или углы равны между собою: то онъ есть параллелограммъ. Черт. 27.

1) Пусть $AB = CD$ и $BC = AD$; проведемъ діагональ AC , усмотришь, что въ треугольнѣхъ ABC и ADC , сверхъ сихъ равныхъ сторонъ, AC есть общая; чего ради уг. $CAB =$ уг. ACD и уг. $ACB =$ уг. CAD (47); слѣдов. AB и BC пр-ны CD и AD (74), каждая каждой, и четырехуг. $ABCD$ есть параллелограммъ (92).

2) Пусть уг. $ABC =$ уг. ADC и уг. $BAD =$ уг. BCD ; проведемъ діагональ AC , усмотришь, чтое каждого изъ треугольнѣхъ ABC и ADC три угла, вмѣстѣ взятые, равны двумъ прямымъ (81); почему уг. $ABC +$ уг. $BCD +$ уг. $ADC +$ уг. $BAD = 4$ п. уг. и уг. $ABC +$ уг. $BCD =$ уг. $ADC +$ уг. $BAD = 2$ п. уг.; чего ради AB и BC пр-ны CD и AD , каждая каждой (74), и четырехуг. $ABCD$ есть параллелограммъ (92).

104. Предложеніе IV. 2-е О. I. Когда въ четырехугольникѣ ($ABCD$) двѣ только противолежащія стороны (AB и CD) равны и при томъ параллельны между собою: то онъ есть параллелограммъ.

Проведемъ діагональ AC ; усмотришь, что въ треугольнѣхъ ABC и ADC , $AB = CD$ по положенію, AC общая и уг. $CAB =$ уг. ACD (77); почему $AD = BC$ (44); слѣдоват. четырехуг. $ABCD$ есть параллелограммъ (103).

105. Предложеніе V. Параллелограммы Черт. 30.
($ABCD$ и $EFGH$) суть совершенно равны меж-

ду собою, когда двѣ соприкосновенныя стороны (AB и AD) одного равны двумъ таковымъ же сторонамъ (EF и EH) другаго, каждая каждой, и углы (BAD и FEH), между сими сторонами содержащїеся, также равны.

Въ игр-хъ $ABCD$ и $EFGH$ проводи діагонали BD и FH ; получатся два треуг. ABD и EFH , кои совершенно равны между собою (44) и суть половины данныхъ параллелограммовъ (95); слѣдов. и проч.

106. *Присовок. 1.* Откуда явствуется, что по даннымъ двумъ соприкосновеннымъ сторонамъ и содержащемуся между ими углу параллелограммъ совершенно опредѣляется; и потому по симъ даннымъ всегда составлесть бытъ можеть.

Черт. 31.

Пусть даны прямыя A и B и уг. C . На сторонахъ угла C возми $CD = A$ и $CE = B$; изъ D и E проводи до взаимнаго пресѣченїя DF и EF , прл-ныя симъ сторонамъ (75); чрезъ что составишися требуемый игр. $CDFE$ (92).

107. *Присовок. 2.* Если данный уголъ есть прямой: то четыреуг. $CDFE$ будетъ прямоугольникъ (93); если же при томъ, данныя A и B равны между собою: то четыреуг. $CDFE$ будетъ квадратъ (98).

108. *Присовок. 3.* Откуда явствуется, что прямоугольники суть совершенно равны между собою, когда двѣ соприкосновенныя стороны одного равны двумъ соприкосновеннымъ сторонамъ другаго (105); а квадраты суть совершенно равны, когда сторона одного равна сторонѣ другаго.

Прилѣс. Посему мы можемъ изображать всякой прямоугольникъ чрезъ двѣ стороны

а квадратиъ чрезъ одну, то есть, прмг. $ABCD$ Черт. 27.
 $\equiv$ прмг. $\overline{AB, BD}$ и кдр. $ABCD =$ кдр. $\overline{AB}$.

109. Предложеніе VI. Параллелограммы, стоящіе на равныхъ основаніяхъ и имѣющіе равныя высоты, величиною суть равны между собою

Пусть AB есть общее основаніе двухъ Черт. 32.
 трапезовыхъ птр-въ $ABCD$ и $ABEF$; стороны ихъ DC и EF , противоположащія и равныя основанію AB (94), будутъ находиться на той же прямой, оному параллельной (96); ибо высоты сихъ параллелограммовъ, по положенію, суть равныя. И такъ въ преуг-хъ DAF и CBE , $AD=BC$, $AF=BE$ (94) и $DF=CE$, почему по описаніи сихъ равныхъ преуг-въ (47), каждаго порознь оны чепыреуг-ка $ABDE$, останутся птр-мы $ABCD$ и $ABEF$, величиною равныя, имѣющіе тоже основаніе и ту же высоту.

Но 1. 2.
и 3.

110. Присовок. 1. Отсюда явствуетъ, что и преугольники, какъ половины параллелограммовъ (95), стоящіе на равныхъ основаніяхъ и имѣющіе равныя высоты, величиною суть равны между собою.

111. Присовок. 2. Отсюда же явствуетъ, что параллелограммъ и преугольникъ суть равны между собою, когда основаніе его есть вдвое больше основанія перваго, а высота таже; или когда высота его есть вдвое больше высоты параллелограмма, а основаніе то же.

112. Присовок. 3. Отсюда еще явствуетъ, что параллелограммъ и преугольникъ по даннымъ основанію и высотѣ величиною своею опредѣляются; а когда при основаніи ихъ еще данъ будетъ уголъ, то и

видъ оныхъ опредѣлился; почему по симъ даннымъ всегда составишь ихъ можно.

Черт. 31. Пусть даны основ. A , выс. B и уг. DCE . Изъ вершины C сего угла на одной изъ сторонъ его CD поставь перпендикуляръ $CN=B$ (51), проводи NF параллельную сей сторонѣ, продолжи другую CE до пресѣченія съ NF и, взявъ $CD=A$, проводи DF параллельную CE , или точки D и E соедини прямою DE ; чрезъ что и получишь требуемый пгр. $CDFE$ или треуг. CDE .

Черт. 33. 113. Предложеніе VII. С. Всякая трапеція ($ABCD$) равна треугольнику (FGH), у котораго основаніе есть прямая (FG), равная вѣдѣствъ взятымъ параллельнымъ сторонамъ оной, а высота (HI) та же, что и въ трапеціи.

Проведши CK , параллельную DA (75), получимъ пгр. $DAKC$ = треуг. HFL (111), у коего осн. $FL=AK$ и выс. $HI=$ выс. DE ; также треуг. CKB = треуг. HLG (110), у коего осн. $LG=KB$ и высота таже; посему явно, что трапеція $ABCD$ = треуг. FGH .

114. Присовокъ. Если одна изъ не параллельныхъ сторонъ AD трапеціи $ABCD$ раздѣлится въ точкѣ M пополамъ и проведется MN , параллельная основанію оной: то сія MN будетъ равна половинѣ вѣдѣствъ взятыхъ параллельныхъ сторонъ трапеціи.

Проведи діагональ AC , пересѣкающуюся съ MN въ точкѣ O ; будетъ $MO=\frac{1}{2}DC$ и $ON=\frac{1}{2}AB$ (101); слѣдов. и проч.

ПРИБАВЛЕНИЕ КЪ СЕЙ IV ГЛАВѢ

О свойствахъ квадратовъ изъ сторонъ
треугольниковъ.

т т т т т

115. Предложеніе VIII. Въ прямоуголь- Черт. 34.
номъ треугольникѣ (ABC) квадратъ изъ сто-
роны (BC), лежащей противъ прямаго угла
(BAC), равенъ двумъ квадратамъ изъ про-
тивъ сторонъ (AB и AC), содержащихъ сей
уголъ. Или иначе: квадратъ изъ гипотену-
зы равенъ квадратамъ изъ катетовъ.

Составъ на BC , AB и AC квадраты $BCDE$,
 $ABFG$ и $ACHI$ (107), проводи AKL перпендику-
лярную BE и прямые AE и CF ; будешь имѣть BE
 $= BC$, $BA = BF$, какъ стороны квадратовъ,
и уг. $ABE =$ уг. CBF , ибо углы ABF и CBE
суть прямые и уг. ABC общій; посему тре-
уг. $ABE =$ треуг. FBG (44). Но въ треуг.
 ABE съ прамг. BEK осн. BE и выс. BK
суть общія, въ треуг. FBG съ бдр. FBA
осн. BF и выс. BA также общія (96); почему
прамг. BEK и кдр. FBA , какъ вдвое боль-
шіе равныхъ имъ треуг. въ ABE и FBG (111),
суть величиною равны между собою. По-
добнымъ образомъ, по проведеніи прямыхъ
 AD и BH , докажется, что треуг. $ACD =$
треуг. BCA и прамг. $CDK =$ кдр. $ACHI$. Слѣ-
дов. бдр. $BCDE =$ бдр. $ABFG +$ кдр. $ACHI$,
или все то же, кдр. $BC =$ кдр. $AB +$ кдр. AC .

116. Присовок. 1. Отсюда слѣдуетъ, что
въ прямоугольномъ треугольникѣ избытокъ

квадрата изъ гипотенузы предъ квадра-
томъ изъ одного его катета равенъ квад-
рату изъ другого, то есть, кдр. $\overline{AC} = \text{кдр.}$
 $\overline{BC} - \text{кдр. } \overline{AB}$, или кдр. $\overline{AB} = \text{кдр. } \overline{BC} - \text{кдр. } \overline{AC}$.

117. *Присовок. 2.* Отсюда также слѣду-
етъ, что въ прямоугольномъ треугольникѣ
квадраты изъ каждаго катета равенъ пря-
моугольнику изъ гипотенузы на соотвѣст-
ственный тому катету отсѣкъ, произве-
денный опущеннымъ на оную изъ вершины
прямаго угла перпендикуляромъ.

Ибо кдр. $\overline{ABFC} = \text{прмг. } \overline{BELK} = \text{прмг.}$
 $\overline{BC, BK}$ и кдр. $\overline{ACHI} = \text{прмг. } \overline{CDLK} = \text{прмг.}$
 $\overline{BC, CK}$ (115 и 109).

Черт. 35.

118. *Присовок. 3.* Отсюда же слѣдуетъ,
что въ прямоугольномъ треугольникѣ $\overline{ABC}$
квадраты изъ перпендикуляра $\overline{AK}$, опущен-
наго изъ вершины A прямаго угла $\overline{BAC}$ на
гипотенузу $\overline{BC}$, равенъ прямоугольнику изъ
отсѣковъ оной $\overline{BK}$ и $\overline{CK}$.

На $\overline{BC}$ поставь перпендикуляръ $\overline{BM} =$
 $\overline{BK}$ (51) и проводи $\overline{MN}$, $\overline{KO}$ и $\overline{CN}$, имъ парал-
лельныя, до взаимнаго съ ними пересѣченія;
получишь прмг. $\overline{BCNM} (= \text{прмг. } \overline{BC, BK}) =$
кдр. $\overline{BK} + \text{прмг. } \overline{CK, BK}$. Но кдр. $\overline{AK} = \text{кдр.}$
 $\overline{AB} - \text{кдр. } \overline{BK} = \text{прмг. } \overline{BC, BK} - \text{кдр. } \overline{BK} = \text{кдр.}$
 $\overline{BK} + \text{прмг. } \overline{CK, BK} - \text{кдр. } \overline{BK} = \text{прмг. } \overline{CK, BK}$
(116 и 117).

Примѣч. Доказанное предъ симъ предложеніе,
обыкновенно, по имени изобрѣтателя его Пиего-
ра, Пиегоровою Вторею называется и естъ
непосредственно къ совокупленію однихъ квадра-
товъ съ другими и отбавленію однихъ отъ другихъ,
какъ то изъ слѣдующаго явствуетъ:

119. Предложеніе IX. С. Составить квадратъ равный множителю данныхъ, вѣсть измѣнныи, квадратами.

Пусть A, B, C , стороны данныхъ квад. Черт. 36.
 ратовъ. Составь прямой уг. $EDF(51)$; на сторонахъ его взявъ $DE=A$ и $DF=B$, проводи GH ; получишь кдр. $\overline{GH} = \text{кдр. } \overline{DE} + \text{кдр. } \overline{DF} = \text{кдр. } \overline{A} + \text{кдр. } \overline{B} \text{ (115)}$. Потомъ, взявъ $DI=C$ и $DK=GH$, проводи IK ; получишь кдр. $\overline{IK} = \text{кдр. } \overline{DK} + \text{кдр. } \overline{DI} = \text{кдр. } \overline{GH} + \text{кдр. } \overline{C} = \text{кдр. } \overline{A} + \text{кдр. } \overline{B} + \text{кдр. } \overline{C} \text{ (115)}$, и такъ далѣе.

120. Предложеніе X. С. Составить квадратъ равный избытку большаго квадрата предъ меньшимъ.

Пусть A сторона большаго квадрата и Черт. 37.
 B меньшаго; отъ неопредѣленной прямой CK возми $CD=A$ и $CE=B$, опиши радиусомъ CD кругъ, линію DFG и изъ E на CD поставь перпендикуляръ $EF(51)$; сія EF будетъ сторона искомаго квадрата.

Ибо въ прмг-мъ треуг. CEF кдр. $\overline{EF} = \text{кдр. } \overline{CF} - \text{кдр. } \overline{CE} = \text{кдр. } \overline{CD} - \text{кдр. } \overline{CE} = \text{кдр. } \overline{A} - \text{кдр. } \overline{B} \text{ (116)}$.

121. Предложеніе XI. Л. Если прямая Черт. 38.
 линія (AB) раздѣлится пополамъ и отъ середины ея (C) протянется какъ нѣсть другая (CD), равная половинѣ первой: то прямая (AD и BD), протянутыя отъ конца (D) сей другой въ концы (A и B) первой, будутъ содержать уголъ (ADB) прямой или составлять съ нею треугольникъ прямоугольный.

Пусть какъ нѣсть протянута прямая $CD=AC=CB$; проведенныя AD и BD со-

составить съ нею треугол-ки ACD и BCD , въ ко-
ихъ уг. $CAD =$ уг. CDA и уг. $CBD =$ уг. CDB
(54); посему уг. $CAD +$ уг. $CBD =$ уг. ADB ; но уг.
 $CAD +$ уг. $CBD +$ уг. $ADB (= 2$ уг. $ADB) = 2$ п.
уг. (31); чего ради уг. ADB есть прямой
и треуг. ABD прямоугольный (65).

Черт. 37. 122. *Присовок.* Въ предыдущемъ пред-
ложеніи нашли, что кдр. $\overline{EF} =$ кдр. $\overline{A} -$ кдр.
 $\overline{B}$; проводя прямыя DF и GF , получимъ
прмг-ный треуг. DFG , въ коемъ кдр. $\overline{EF} =$
прмг. $\overline{EGDE} =$ прмг. $(A+B), (A-B)$ (118). И
такъ кдр. $\overline{A} -$ кдр. $\overline{B} =$ прмг. $(A+B), (A-B)$;
то есть, разность квадратовъ изъ какихъ
нисть двухъ прямыхъ линий равна пря-
моугольнику изъ суммы и разности тѣхъ
же самыхъ линий.

Черт. 39. 123. *Предложеніе XII.* С. Данный пра-
моугольникъ ($ABCD$) обратить въ квадратъ.

Сіе учинить можно основываясь или
на 2, или на 3 присовокупленіяхъ (117 и
118) къ предложенію VIII-му.

№ 1. 1.) Изъ середины E большей стороны
 AB прмг-ка $ABCD$ опиши на ней круг. ли-
нію ACB , возми $AF = AD$; изъ F поставь пер-
пендикуляръ FG (51) и проводи AG ; квад-
ратъ изъ сей прямой будетъ требуемый.
Проведши BG и EG , получимъ прмг-ный
треуг. ACB (121); почему кдр. $\overline{AG} =$ прмг.
 $\overline{AB}, AF =$ прмг. $\overline{AB}, AD$ (117).

№ 2. 2.) Продолживъ сторону AB , возми AE
 $= AD$; потомъ на прямой BE радіусомъ EF ,
равнымъ половинѣ оной, опиши круг. ли-
нію BCE и AD продолжи до пресѣченія съ
сею линіею въ точкѣ G ; квадратъ изъ AG

будетъ рапенъ прмг. $ABCD$. Проведши BC , EG и FC , усмотришь, что уг. BCE есть прямой (121); посему кдр. $AC =$ прмг. $AB, AE =$ прмг. AB, AD (118).

124. Присовок. Отсюда имѣемъ средство и всякой треугольникъ обратишь въ квадратъ (111).

125. Предложеніе XIII. Л. Если пра- Черт. 4с.
мая (AB) разсѣется на двѣ какія нистъ
части (AC и BC): то квадратъ изъ всей пра-
мой (AB) равенъ суммѣ взятыхъ квадра-
тами изъ частей ея (AC и BC) съ двукрат-
нымъ изъ нихъ прямоугольникомъ, то есть,
кдр. $AB =$ кдр. $AC +$ кдр. $BC + 2$ прмг. AC, BC .

На AB описавъ кругъ линію ADB , поставъ
перпендикуляръ CD (51) и проводи AD и BD ;
получишь прмг-ный треуг- ADB (121); по-
чему будетъ кдр. AB ($=$ кдр. $(AC + BC)$) $=$
кдр. $AD +$ кдр. $BD =$ кдр. $AC +$ кдр. $BC + 2$ кдр.
 $CD =$ кдр. $AC +$ кдр. $BC + 2$ прмг. AC, BC (115
и 118).

126. Присовок. Если $AC = CB$: то кдр.
 $AB = 4$ кдр. AC .

127. Предложеніе XIV. О. XIII. Если- Черт. 4с.
ли прямая (AB) разсѣется на двѣ какія н-
естъ части (AC и BC): то квадратъ изъ од-
ной части (какъ AC) равенъ суммѣ взятыхъ
квadrатами изъ всей прямой (AB) и другой
ея части (BC) безъ двукратнаго изъ нихъ
прямоугольника, то есть, кдр. $AC =$ кдр. AB
 $+ \text{ кдр. } BC - 2 \text{ прмг. } AB, BC$.

Сдѣлавъ тоже строеніе, что и въ предъ-
идущемъ предложеніи, получишь прмг-ные

треуг. ADB и ACD , въ коихъ кдр. $\overline{AC}$ ($=$ кдр. $(AB-BC)$) $=$ кдр. $\overline{AD}$ — кдр. $\overline{CD}$ — прмг. $\overline{AB, AC}$ — прмг. $\overline{BC, AC}$ (115, 117 и 118). Но прмг. $\overline{AB, AC} =$ прмг. $\overline{AB, (AB-BC)} =$ кдр. $\overline{AB}$ — прмг. $\overline{AB, BC}$ и прмг. $\overline{BC, AC} =$ прмг. $\overline{BC, (AB-BC)} =$ прмг. $\overline{BC}$; слѣдов. кдр. $\overline{AC} =$ кдр. $\overline{AB} +$ кдр. $\overline{BC}$ — 2 прмг. $\overline{AB, BC}$.

Черт. 41.

128. Предложеніе XV. Въ тупоугольн. $\triangle ABC$ квадратъ изъ стороны (BC) , лежащей противъ тупаго угла (BAC) , больше двухъ квадратовъ изъ прочихъ сторонъ $(AB$ и $AC)$, содержащихъ сей уголъ, двукратныиъ прямоугольниками изъ одной таковой стороны (какъ AC) и отѣвка продолженія ея (AD) , содержащагося между вершиною (A) тупаго угла и перпендикуляромъ (BD) , опущенныиъ на оное продолженіе изъ вершины (B) противолежащаго угла (ABC) .

Изъ прмг.-наго треуг. BDC имѣемъ кдр. $\overline{BC} =$ кдр. $\overline{BD} +$ кдр. $\overline{CD} =$ кдр. $\overline{BD} +$ кдр. $\overline{AD} +$ кдр. $\overline{AC} + 2$ прмг. $\overline{AC, AD}$ (115 и 123) и въ прмг.-номъ треуг. ADB кдр. $\overline{BD} +$ кдр. $\overline{AD} =$ кдр. $\overline{AB}$ (115); слѣдов. кдр. $\overline{BC} =$ кдр. $\overline{AB} +$ кдр. $\overline{AC} + 2$ прмг. $\overline{AC, AD}$.

Черт. 42.

129. Предложеніе XVI. Во всякомъ тупоугольн. $\triangle ABC$ квадратъ изъ стороны (BC) , лежащей противъ остраго угла (BAC) , меньше двухъ квадратовъ изъ прочихъ сторонъ $(AB$ и $AC)$, содержащихъ сей уголъ, двукратныиъ прямоугольниками изъ одной таковой стороны (какъ AC) и отѣвка ея (AD) , содержащагося между вершиною (A) тупаго угла и перпендикуляромъ (BD) , опущенныиъ на оное продолженіе изъ вершины (B) противолежащаго угла (ABC) .

остраго угла и перпендикуляромъ (BD), опущеннымъ на оную сторону, продолженную, если нужно, изъ вершины (B) противолежащаго угла (ABC).

Здѣсь три случая имѣютъ мѣсто: перпендикуляръ BD падаетъ или внутри треугольника ABC , или вѣ его, или по самой сторонѣ BC .

1.) Пусть BD падаетъ внутри треуг. ABC . Изъ прмг-наго треуг. BDC имѣемъ кдр. $\overline{BC} = \text{кдр. } \overline{BD} + \text{кдр. } \overline{CD} = \text{кдр. } \overline{BD} + \text{кдр. } \overline{AC} + \text{кдр. } \overline{AD} - 2 \text{ прмг. } \overline{AC}, \overline{AD}$ (115 и 127); но въ прмг-номъ треуг. ADB кдр. $\overline{BD} + \text{кдр. } \overline{AD} = \text{кдр. } \overline{AB}$ (115); слѣдов. кдр. $\overline{BC} = \text{кдр. } \overline{AB} + \text{кдр. } \overline{AC} - 2 \text{ прмг. } \overline{AC}, \overline{AD}$.

No 1.

2.) Пусть BD падаетъ вѣ треуг. ABC . Изъ прмг-наго треуг. BDC имѣемъ кдр. $\overline{BC} = \text{кдр. } \overline{BD} + \text{кдр. } \overline{CD} = \text{кдр. } \overline{BD} + \text{кдр. } \overline{AD} + \text{кдр. } \overline{AC} - 2 \text{ прмг. } \overline{AC}, \overline{AD}$ (115 и 127); но въ прмг-номъ треуг. ADB кдр. $\overline{BD} + \text{кдр. } \overline{AD} = \text{кдр. } \overline{AB}$ (115); слѣдов. кдр. $\overline{BC} = \text{кдр. } \overline{AB} + \text{кдр. } \overline{AC} - 2 \text{ прмг. } \overline{AC}, \overline{AD}$.

No 2.

3) Наконецъ пусть BD падаетъ по сторонѣ BC . Изъ прмг-наго треуг. ACB имѣемъ кдр. $\overline{BC} = \text{кдр. } \overline{AB} - \text{кдр. } \overline{AC} = \text{кдр. } \overline{AB} + \text{кдр. } \overline{AC} - 2 \text{ кдр. } \overline{AC}$; но кдр. $\overline{AC} = \text{прмг. } \overline{AC}, \overline{AD}$, ибо $\overline{AC} = \overline{AD}$ (109); чего ради кдр. $\overline{BC} = \text{кдр. } \overline{AB} + \text{кдр. } \overline{AC} - 2 \text{ прмг. } \overline{AC}, \overline{AD}$ (115).

No 3.

150. Присовок. Отсюда слѣдуетъ, что если квадратъ изъ одной стороны треугольника равенъ двумъ квадратамъ изъ прочихъ сторонъ, то оный есть прямоугольный;

Черт. 43.

151. Предложеніе XVII. С. Если въ треугольникѣ (ABC) изъ вершины его въ средину основанія (AB) проведена прямая (CD); то квадраты изъ сторонъ треугольника суть едвое больше квадратовъ изъ той прямой и изъ половины (AD) основанія.

Здѣсь два случая имѣютъ мѣсто: прямая CD или перпендикулярна къ AB , или перпендикуляръ CE , опущенный на AB , падаетъ на которую нибудь сторону оной CD .

№ 1.

1) Пусть CD перпендикулярна къ AB ; будетъ кдр. $\overline{CA} = \text{кдр. } \overline{CD} + \text{кдр. } \overline{AD}$ и кдр. $\overline{CB} = \text{кдр. } \overline{CD} + \text{кдр. } \overline{BD}$ (115); посему кдр. $\overline{CA} + \text{кдр. } \overline{CB} = 2 \text{ кдр. } \overline{CD} + 2 \text{ кдр. } \overline{AD}$, ибо $AD = BD$.

№ 2.

2) Пусть перпендикуляръ CE падаетъ такъ, какъ въ чертежѣ показано; будетъ уг. ADC острый (62) и уг. CDB тупой (57); почему кдр. $\overline{AC} = \text{кдр. } \overline{CD} + \text{кдр. } \overline{AD} - 2 \text{ прмг. } \overline{AD, DE}$ (129) и кдр. $\overline{CB} = \text{кдр. } \overline{CD} + \text{кдр. } \overline{BD} + 2 \text{ прмг. } \overline{BD, DE}$ (128); но $AD = BD$; чего ради кдр. $\overline{AC} + \text{кдр. } \overline{CB} = 2 \text{ кдр. } \overline{CD} + 2 \text{ кдр. } \overline{AD}$.



КНИГИ ПЕРВОЙ ГЛАВА V.

О многоугольникахъ вообще.



152. Определеніе I. Определенное на плоскости пространство, содержащееся между шестью, и такъ далѣе прямыми линиями

изъ копъхъ, каждая двѣ токмо другія сопрягаются, называется *пятиугольникомъ*, *шестиугольникомъ*, и такъ далѣе.

153. *Присовок. 1.* Вообще всякое такое пространство, какимъ внесешь числомъ прямыхъ линий содержимое, *многоугольникомъ* именуется; и каждая изъ сихъ прямыхъ, по разнѣ, *стороною*, а всѣ вмѣстѣ *периметромъ* его называющися.

154. *Присовок. 2.* Въ многоугольникѣ каждая изъ прямыхъ, протянутыхъ отъ вершины одного угла до вершинъ прочихъ угловъ, не прилежащихъ сторонамъ сего угла, *диагоналю* оного именуется.

155. *Опредѣленіе II.* Многоугольникъ, въ которомъ всѣ стороны и всѣ углы суть равныя, называется *правильнымъ*; всякой же иной *неправильнымъ*.

156. *Предложеніе I.* Всякой многоугольникъ ($ABCDE$) *диагоналями* (AC, AD), протянутыми отъ вершины одного угла (BAE) до вершинъ прочихъ, раздѣляется на столько *треугольниковъ* (ABC, ACD, ADE), сколько многоугольникъ имѣетъ *сторонъ* безъ двухъ.

Черт. 44.

Отъ вершины A угла BAE *диагонали* протянуты быти могутъ токмо до вершинъ тѣхъ угловъ, кои не суть при сторонахъ оного (154); изъ чего явствуетъ, что протянутыхъ *диагоналей* будетъ *тремъ* меньше *противу* угловъ или *сторонъ* многоугольника; ибо въ многоугольникѣ столько же *сторонъ*, сколько *угловъ*. Но каждая *диагональ*, начиная отъ стороны AB угла BAE , отдѣляетъ отъ многоуг. $ABCDE$ *треугольникъ* и при послѣдней *диагонали* и *сторонѣ* AE тогожъ угла BAE *остається*

еще одинъ треугольникъ; чего ради треугольниковъ, на кои многоуг. $ABCDE$ раздѣляется, будетъ одинъ больше противу діагоналей и слѣдов. токмо двумя меньше противу сторонъ многоугольника.

157. *Присовок.* Отсюда слѣдуетъ, что многоугольники суть совершенно равны между собою, когда они состоятъ изъ равно-многихъ совершенно равныхъ и подобно расположенныхъ треугольниковъ.

Впрочемъ равенство таковыхъ многоугольниковъ можно доказать непосредственно чрезъ наложеніе (44, 47, 68 и 71).

158. *Предложеніе II.* Во всякомъ многоугольникѣ всѣ углы, взятыя, равны двумъ прямымъ столько разъ взятымъ, сколько у него сторонъ безъ двухъ.

Черт. 45.

Имѣя какой нибудь точки F , внутри многоуг-ка $ABCDE$ взятой, проводи до вершинъ угловъ онаго прямыя FA, FB, FC и проч.; получишь столько треугольн. AFB, BFC, CFD и проч. сколько многоугольникъ сторонъ имѣетъ; но всякаго треугольника при угла равны двумъ прямымъ (81); чего ради всѣ углы сихъ треугольниковъ равны двумъ прямымъ столько разъ взятымъ, сколько многоугольникъ сторонъ имѣетъ. И такъ по описанію угловъ, составленныхъ при F , равныхъ чешыремъ прямымъ (86), заключишь, что всѣ углы многоуг-ка $ABCDE$ равны двумъ прямымъ столько разъ взятымъ, сколько у него сторонъ безъ двухъ.

159. *Присовок. 1.* Отсюда слѣдуетъ, что въ многоугольникахъ, равномногихъ сторонъ имѣющихъ, всѣ углы, взятыя,

одного равны всѣмъ угламъ, вмѣстѣ взятымъ, другаго.

140. *Присовок. 2.* Отсюда же слѣдуетъ, что во всякомъ многоугольникѣ внѣшніе углы, составляемые каждою изъ сторонъ съ продолженіемъ другой, купно взятые, равны чешыремъ прямымъ.

Продолжи стороны многоуг-ка $ABCDE$; Черт. 45.
усмотришь, что внѣшніе углы CAB , HBC и проч. съ внутренними углами онаго равны двумъ прямымъ столько разъ взятымъ, сколько у него сторонъ; но внутренніе углы съ углами, составленными при F , равны двумъ прямымъ столько же разъ взятымъ (138); чего ради, по опиятіи внутреннихъ угловъ многоугольника, найдешь, что внѣшніе углы равны угламъ, составленнымъ при F , или все то же, равны чешыремъ прямымъ (58).

Приибъ. Въ семъ присовокупленіи мы полагали всѣ углы многоугольника исходящими; но если оный имѣеть углы входящіе: то, для полученія всѣхъ внѣшнихъ угловъ многоугольника, надлежитъ на каждый таковой уголъ прибавлять къ чешыремъ прямымъ два прямыхъ.

Въ самомъ дѣлѣ пусть въ многоуг-кѣ Черт. 46.
 $ABCDE$ уг. AED есть входящій; проведеши AD , получиши многоуг. $ABCD$, у котораго внѣшніе углы, вмѣстѣ взятые, равны чешыремъ прямымъ (140); но чтобы имѣть внѣшніе углы многоуг-ка $ABCDE$, надлежитъ къ внѣшнимъ угламъ многоуг-ка $ABCD$ прибавить углы AED , EDA и DAE , кои равны двумъ прямымъ (81); слѣдов. и проч.

141. *Предложеніе III.* Какой ниесть

многоугольни́къ ($ABCDE$) обрати́ть въ треу́-

Черт. 47. голѣнникъ.

Проведи въ немъ діагональ AD и ей прл-ную EF до пресѣченія съ продолженіемъ стороны AB , также прямую DE ; будетъ треуг. $FAD =$ треуг. EAD (110); почему, придавъ къ нимъ общій многоуг. $ABCD$, получишь многоуг. $FBCD =$ многоуг. $ABCDE$. Потомъ проводи діагональ FC , DC ей прл-ную и прямую CG ; получишь, какъ и прежде, треуг. $GCF =$ треуг. DFC и потому треуг. $GBC =$ многоуг. $FBCD =$ многоуг. $ABCDE$. Такимъ образомъ всякой многоугольни́къ можно обрати́ть въ треу́гольни́къ.

Черт. 46.

Примѣз. Если многоуг. $ABCDE$ имѣеть уг. AED входящій: то, по проведеніи прямыхъ AD , ей прл-ной EF и DF , получишь треуг. $AFE =$ треуг. DFE (110) и многоуг. $FBCD$, который равенъ первому и входящаго угла не имѣеть; а посему, какъ и прежде, найдешь треу́гольни́къ ему равный.

142. Присовок. 1. Отсюда имѣемъ средство всякой многоугольни́къ обрати́ть въ параллелограммъ, или квадра́тъ, оному равный (141, 111 112 и 125).

143. Присовок. 2. Отсюда же имѣемъ средство находить или треу́гольни́къ, или параллелограммъ, или квадра́тъ во сколько разъ большій или меньшій даннаго многоугольни́ка, во сколько угодно будетъ.

Ибо если обрати́мъ данный многоугольни́къ въ треу́гольни́къ (141) и взявъ сего основаніе или высоту столько разъ больше или меньше, во сколько оный долженъ быть больше или меньше даннаго многоугольни́ка, составимъ новый треу́гольни́къ.

имѣющій при той же высотѣ или основаніи и при какомъ ииестѣ углы сямъ образомъ взятыхъ основаніе или высоту (112); но оный будетъ требуемый (110). Имѣя же таковой треугольникъ, получимъ изъ онаго или параллелограммъ или квадратъ во столько разъ большій или меньшій даннаго многоугольника, во сколько разъ больше или меньше взятыхъ основаніе или высота того треугольника (142, 109 и 103).

КНИГИ ПЕРВОЙ ГЛАВА VI.

О теоріи величинъ пропорціональныхъ, составляющей второе катало Геометріи.

Въ предѣдущей главѣ видѣли, что всякой многоугольникъ можно обратить въ треугольникъ, или параллелограммъ, или квадратъ; послѣ сего естественно представляется обратный вопросъ: какъ обратить треугольникъ или параллелограммъ или квадратъ въ многоугольникъ, который бы съ даннымъ имѣлъ нѣкоторое извѣстное сходство, потому что въ противномъ случаѣ вопросъ былъ бы неопредѣленный? Также видѣли, что всегда можно составить треугольникъ или параллелограммъ или квадратъ во столько разъ большій или меньшій даннаго многоугольника, во сколько угодно будетъ; почему новый рождается вопросъ: какъ составить многоугольникъ, который бы съ даннымъ сохранялъ точно тотъ же самый видъ и былъ въ разсужденіи его во столько разъ большій или меньшій, во сколько угодно будетъ? Сіи и многіе другіе подобныя вопросы требуютъ совсѣмъ особаго начала, которое извѣстно подъ именемъ теоріи величинъ пропорціональныхъ и которое здѣсь разсмотримъ.

144. *Опредѣленіе I.* Величина называется *кратною* другой, когда она сею другою измѣряется безъ остатка.

145. *Опредѣленіе II.* Величина называется *частною* другой, когда она сію другую измѣряетъ безъ остатка.

146. *Опредѣленіе III.* Когда многія величины измѣряются равномногими другими равно; то первыя называются *равнократными* другихъ, а другія *равночастными* первыхъ.

147. *Присовок.* Явно, что равнократныя или равночастныя той же величины или равныхъ величинъ супъ равны между собою; также явно, что кратная или частная большей величины есть больше, нежели равнократная или равночастная меньшей величины.

148. *Опредѣленіе IV.* Величина, которая измѣряетъ многія другія, называется *общою мѣрою* сихъ другихъ; *общою же наибольшою мѣрою* многихъ величинъ называется та, которую измѣряетъ всякая иная тѣхъ же многихъ величинъ общая мѣра.

149. *Опредѣленіе V.* Двѣ величины или имѣютъ общую мѣру или не имѣютъ: тѣ, которыя имѣютъ оную, называются *соизмѣримыми*; а тѣ, которыя не имѣютъ, *не соизмѣримыми*.

Черт. 18. 150. *Опредѣленіе VI.* Когда изъ двухъ несоизмѣримыхъ величинъ (A и B) одной которой ни есть (какъ B) возмется какая нибудь частная величина (E) и сей частной различныя кратныя: то послѣдняя кратная (X) изъ тѣхъ, кои меньше другой

несоизмѣримой величины (A), называется *меньшею приближенною* сей величины (A), взятою по оной частной (E); а первая кратная (F) изъ тѣхъ, кои больше другой несоизмѣримой величины (A) именуется *большею приближенною* сей же величины (A), взятою по той же частной (E).

151. *Опредѣленіе VII.* Четыре величины Черт. 49.
(A , B , C и D), въ случаѣ соизмѣримости первой со второю (A съ B) и третьей съ четвертою (C съ D), называются пропорціональными, когда первая и третья (A и C) суть равнократны какихъ ни есть изъ равночасныхъ (E и F) второй и четвертой (B и D); а въ случаѣ несоизмѣримости, когда приближенные ихъ (X и Y , Z и V) по всякимъ равночаснымъ (E и F) второй и четвертой (B и D) взятыя, суть равнократны оныхъ равночасныхъ (E и F).

Примѣч. Изъ сего опредѣленія явствуетъ, что пропорціональность четырехъ величинъ, въ случаѣ несоизмѣримости первой со второю и третьей съ четвертою, опредѣляется приближенными первой и третьей; почему если пропорціональность четырехъ величинъ въ случаѣ соизмѣримости первой со второю и третьей съ четвертою утвердился: то доказательство пропорціональности подобныхъ имъ величинъ, въ случаѣ несоизмѣримости, само собою представится. Ибо въ семъ случаѣ стоитъ токмо изъ данныхъ четырехъ величинъ по какимъ нѣсть равночаснымъ второй и четвертой взять приближенные первой и третьей; и если сіи приближенные будутъ оныхъ равночасныхъ равнократны, то данные четыре величины суть пропорціональны. И такъ причина, для чего во всей сей теоріи случай несоизмѣримыхъ оставленъ безъ разсмотрѣнія, очевидна. Впрочемъ въ приложеніи сей теоріи къ прямымъ

линіямъ и образованнымъ ими плоскостямъ, также въ приложеніи оной къ тѣламъ, для большаго утвержденія въ семъ примѣчаніи сказаннаго, доказательства пропорціональности четырехъ величинъ и въ случаѣ несоизмѣримости ихъ предложены будутъ.

152. *Присовок. 1.* Четыре пропорціональныя величины A, B, C и D , написанныя въ семъ видѣ: $A:B=C:D$, составляютъ то, что пропорціею называется. Словами она изображается такъ: A относится къ B , такъ какъ C относится къ D ; или еще: отношеніе A къ B равно отношенію C къ D .

153. *Присовок. 2.* Въ пропорціи $A:B=C:D$ величины A, B, C и D *членами* оной именуяся; при томъ первая A и третья C *предъидущими*, а вторая B и четвертая D *послѣдующими*.

154. *Присовок. 3.* Пропорція, въ коей средніе члены B и C равны между собою, непрерывною называется.

155. *Предложеніе I.* Если четыре величины A, B, C и D таковы, что первая A равна второй B и третья C равна четвертой D ; то оныя составляютъ пропорцію $A:B=C:D$.

По положенію $A=B$ и $C=D$; чего ради A и C суть равнократныя величины, B и D , а B и D въ разсужденіи самихъ себя равночастны; слѣдов. данныя величины суть пропорціональны (151), то есть, $A:B=C:D$.

156. *Предложеніе II.* Если четыре величины A, B, C и D таковы, что первая A и третья C суть какія нибудь равнократныя или равночастныя второй B и четвертой D ; то оныя также составляютъ пропорцію $A:B=C:D$.

По положенію A и C суть равнократны B и D , а сіи въ разсужденіи самихъ себя равночастны; чего ради предложеніе явствуетъ (151).

Или: поелику A и C въ разсужденіи самихъ себя суть равнократны, а въ разсужденіи B и D по положенію равночастны; чего ради предложеніе также явствуетъ (151).

157. Предложеніе III. Ежели четыре однопородныя величины A, B, C и D таковы, то первая A равна третьей C и вторая B равна четвертой D ; то оныя равнымъ образомъ составляютъ пропорцію $A:B=C:D$.

Пусть величинъ A и B общая мѣра E ; по положенію $A=C$ и $B=D$, то C и D будутъ имѣть ту же общую мѣру E ; почему взявъ $E=E$, найдемъ, что A и C суть равнократны E и F , а сіи равночастны величинъ B и D ; слѣдов. $A:B=C:D$ (151).

158. Предложеніе IV. Ежели четыре однопородныя величины A, B, C и D таковы, то первые двѣ A и B суть какія нибудь равнократныя или равночастныя другихъ двухъ C и D : то оныя также составляютъ пропорцію $A:B=C:D$.

Пусть величинъ A и B общая мѣра E ; взявъ F столько же частную D , сколько E есть частна B (102), усмотришь, что E есть столько же кратна или частна F , сколько B есть кратна или частна D , или сколько A есть кратна или частна C (146); ибо A и B , по положенію, суть равнократны или равночастны величинъ C и D . Но A есть кратна E , какъ своей мѣры; почему и C есть столько же кратна F , сколько A есть кратна E (146). И такъ A и C суть равно-

кратны E и F , кои равночастны величинъ B и D ; слѣдов. $A: B = C: D$ (151).

159. Предложеніе V. Если двѣ величины A и B и двѣ другія C и D съ одними и тѣми же двумя величинами M и N составляютъ пропорціи $A: B = M: N$ и $C: D = M: N$; то оныя и между собою также составятъ пропорцію $A: B = C: D$.

Пусть величины A и B , C и D , M и N общія наибольшія мѣры E , F и G . Поелику E и C членовъ B и N пропорціи $A: B = M: N$ суть равночастны, а члены A и M оныхъ E и G равнократны (151); также F и C членовъ D и N пропорціи $C: D = M: N$ суть равночастны, а члены C и M оныхъ F и G равнократны (151); то слѣдуетъ, что E и F величинъ B и D суть равночастны, а величины A и C тѣхъ же E и F суть равнократны (146); слѣдов. $A: B = C: D$ (151).

160. Присовок. Откуда слѣдуетъ, что когда въ пропорціи $A: B = C: D$ первыхъ двухъ членовъ или послѣднихъ двухъ или тѣхъ и другихъ возмущенъ равнократныя или равночастныя величины; то оныя съ остальными членами или съ равнократными или равночастными ихъ величинами также составляютъ пропорцію.

Пусть M и N равнократныя или равночастныя величины членовъ A и B ; будетъ $M: N = A: B$ (158); но по положенію $A: B = C: D$; чего ради $M: N = C: D$ (159).

161. Предложеніе VI. Въ пропорціи $A: B = C: D$ послѣдующіе члены B и D взятые за предъидущіе, а предъидущіе A и C за послѣдующіе, также составятъ пропорцію; что называется переложеніемъ пропорціи.

Пусть величинъ B и D равночастныя E и F . Члены A и C пропорціи $A:B=C:D$ будутъ сихъ равночастныхъ равнократны (151); почему обратно E и F будутъ членомъ A и C равночастны, а B и D оныхъ равнократны; слѣдов. $B:A=D:C$ (151)

162. Предложеніе VII. О. I. Ежели въ пропорціи $A:B=C:D$ одинъ изъ предъидущихъ членовъ равенъ своему послѣдующему; то и другой предъидущій членъ равенъ же своему послѣдующему.

Пусть $A=B$; явно, что величинъ A и B общая наибольшая мѣра есть B ; почему величинъ C и D общею наибольшею мѣрою должна быть D ; ибо D , по причинѣ пропорціи $A:B=C:D$, должна быть столько же частна самой себя, сколько B есть частна самой себя (151); но, по той же причинѣ, A и C должны быть равнократны тѣхъ равночастныхъ величинъ B и D (151); слѣдов. если $A=B$, будетъ $C=D$.

163. Предложеніе VIII. О. II. Ежели въ пропорціи $A:B=C:D$ одинъ изъ предъидущихъ членовъ будетъ какаа нисть кратная или частная величина своего послѣдующаго; то и другой предъидущій членъ будетъ столько же кратная или частная величина своего послѣдующаго.

1) Пусть A есть какая нибудь кратная величины B . Члены A и C пропорціи $A:B=C:D$ должны быть равнократны равночастныхъ B и D (151); но B есть частная величины A , почему и D должна быть столько же частна величины C (151); слѣдов. C столько же кратна D , сколько A есть кратна B .

2) Пусть A есть какая нибудь частная величины B . Изъ данной пропорціи чрезъ переложеніе получится $B:A=D:C$ (161), гдѣ B есть крайняя величины A ; слѣдов. и проч.

164. Предложеніе IX. Если въ пропорціи $A:B=C:D$ одинъ предъидущій членъ больше или меньше своего послѣдующаго; то и другой предъидущій также будетъ больше или меньше своего послѣдующаго.

Пусть величинъ B и D равночастныя E и F . Члены A и C пропорціи $A:B=C:D$ суть сихъ равночастныхъ равнократны (151) но по положенію $A >$ или $< B$; то явно, что въ A величинъ E больше или меньше содержится, нежели въ B ; почему C , содержащая величинъ F столько же, сколько A содержитъ величинъ E (151), должна содержать тѣхъ же величинъ F больше или меньше нежели величина D ; слѣдов. и проч. (147).

165. Предложеніе X. О. I. Если въ пропорціи $A:B=C:D$ послѣдующіе члены B и D равны между собою; то и предъидущіе A и C также равны между собою; и обратно.

1) Пусть величинъ B и D равночастныя E и F . Члены A и C пропорціи $A:B=C:D$ суть сихъ равночастныхъ равнократны (151); но по положенію $B=D$, чего ради $E=F$ и $A=C$ (147).

2) Когда въ пропорціи $A:B=C:D$ будетъ $A=C$, то и $B=D$. По переложеніи данной пропорціи, сія часть предложенія обратится въ первую; слѣдов. и проч.

166. Присовок. Откуда слѣдуетъ, что когда три какіе ни есть члена одной пропорціи $A:B=C:D$ равны тремъ членамъ дру-

той $E:F=C:H$, каждый каждому; то и четвертый равен будетъ четвертому.

Пусть $A=B$, $B=F$ и $C=G$; послѣдняя пропорція свѣзается $A:B=C:H$; откуда, по сравненіи сей съ первою, получится $C:D=C:H$ (159) и будетъ $D=H$ (165).

167. Предложеніе XI. О. П. Если въ пропорціи $A:B=C:D$ одинъ послѣдующій членъ будетъ какая нисетъ кратная или частная величина другого послѣдующаго; то и предъидущій его членъ будетъ столько же кратная или частная величина другого предъидущаго; и обратно.

1) Пусть B какая нисетъ кратная величины D , или все то же, D какая ни естъ частная величины B ; и пусть X столько же кратная величина C , сколько B естъ кратна D ; будетъ $X:B=C:D$ (156); но по положенію $A:B=C:D$, чего ради $X=A$ (166). Слѣдов. A естъ столько же кратна C , сколько B естъ кратна D , или все то же, C естъ столько же частна A , сколько D естъ частна B .

2) Когда въ пропорціи $A:B=C:D$ будетъ A какая нисетъ кратная или частная величины C ; то и B столько же будетъ кратная или частная величины D . По переложеніи данной пропорціи (161), сія частъ предложенія обратится въ первую; слѣдов. и проч.

168. Предложеніе XII. Если въ пропорціи $A:B=C:D$ одинъ послѣдующій членъ больше или меньше другого послѣдующаго; то и предъидущій его членъ больше или меньше другого предъидущаго; и обратно.

1) Пусть будетъ $B>D$ или все то же $B<D$; и пусть сихъ величинъ равночасн-

ныя E и F . Члены A и C пропорціи $A: B = C: D$ суть сихъ равночасныхъ равнократны (151); но по положенію $B > D$, чего ради $E > F$ и $A > C$ (147).

2) Когда въ пропорціи $A: B = C: D$, $A > C$ или $C < A$: то будетъ и $B > D$ или $D < B$. По переложеніи данной пропорціи (161), сія часть предложенія обратится въ первую; слѣдов. и проч.

169. Предложеніе XIII. Если въ пропорціи $A: B = C: D$ всѣ члены суть однородные: то первый и второй, взятые за предѣдущіе, а третій и четвертый за послѣдующіе, также составятъ пропорцію $A: C = B: D$; что называется перемѣненіемъ пропорціи.

Пусть величинъ B и D равночасныя E и F . Члены A и C пропорціи $A: B = C: D$ суть сихъ равночасныхъ равнократны (151); чего ради будетъ $E: F = B: D$, $A: C = E: F$ (158) и $A: C = B: D$ (159).

170. Предложеніе XIV. Если въ пропорціи $A: B = C: D$ къ предѣдущимъ членамъ A и C , послѣдующіе B и D приложатся или отнимутся: то цѣлыя величины $A + B$ и $C + D$, или разности $A - B$ и $C - D$ съ силами послѣдующими B и D , или съ самими предѣдущими A и C , также составятъ пропорціи $A \pm B: B = C \pm D: D$ или $A \pm B: A = C \pm D: C$; что называется совокупленіемъ или отдѣленіемъ пропорціи.

Члены A и C пропорціи $A: B = C: D$ должны быть равнократны какихъ нисешь равночасныхъ членовъ B и D (151); пусть E и F сіи равночасныя; явно, что $A \pm B$ и $C \pm D$ также будутъ равнократны оныхъ

E и F ; слѣдов. $A \pm B : B = C \pm D : D$ (151) или $A \pm B : A = C \pm D : C$; ибо E и F суть равночастныя же членовъ A и C (151).

171. Присовок. 1. Ежели въ пропорціи $A : B = C : D$ положимъ $A = B$: то будетъ $C = D$ (162) и пропорціи $A + B : B = C + D : D$ и $A + B : A = C + D : C$ сдѣлаются 2 $A : B = 2 C : D$ и 2 $B : A = 2 D : C$ или $A : 2 B = C : 2 D$ (161). Откуда слѣдуетъ, что если въ пропорціи $A : B = C : D$ предъидущихъ или послѣдующихъ членовъ возмутся равнократныя: то сіи въ первомъ случаѣ съ послѣдующими, а во второмъ съ предъидущими составятъ пропорцію.

172. Присовок. 2. Изъ пропорцій 2 $A : B = 2 C : D$ и $A : 2 B = C : 2 D$, въ коихъ $A = B$ и $C = D$, каждая даетъ $A : B = C : D$ (170 и 161); чего ради если предъидущихъ или послѣдующихъ членовъ пропорціи возмутся равнократныя: то сіи въ первомъ случаѣ съ послѣдующими, а во второмъ съ предъидущими также составятъ пропорцію.

173. Предложеніе XV. Ежели величины M и N съ предъидущими членами A и C пропорціи $A : B = C : D$ составляютъ пропорцію $M : A = N : C$: то оныя и съ послѣдующими B и D составятъ пропорцію $M : B = N : D$; и обратно.

1) Члены M и N пропорціи $M : A = N : C$ должны быть равнократныя какихъ ни есть равночастныхъ величинъ A и C (151); пусть E и F сіи равночастныя. По положенію $A : B = C : D$; то будетъ $E : B = F : D$ (172) и слѣдов. $M : B = N : D$ (171).

2) Ежели $A : B = C : D$ и $M : B = N : D$, то будетъ $M : A = N : C$. По переложеніи пропорціи $A : B = C : D$ (161), сія часть предложе-

нія обратиться въ первую; чего ради будетъ,
 $M: A = N: C$.

174. Присовок. 1. Изъ пропорціи $A: B = C: D$ имѣемъ $A + B: B = C + D: D$ и $A - B: B = C - D: D$ (170); чего ради $A + B: A - B = C + D: C - D$ (173).

175. Присовок. 2. Когда имѣемъ многія пропорціи $A: P = K: Q$, $B: P = L: Q$, $C: P = M: Q$ и проч.; то будетъ $A \pm B \pm C: P = K \pm L \pm M: Q$.

Изъ пропорцій $A: P = K: Q$ и $B: P = L: Q$ имѣемъ $A: B = K: L$ (173) и $A \pm B: A = K \pm L: K$ (170); но $A: P = K: Q$; чего ради $A \pm B: P = K \pm L: Q$ (173). Потомъ, имѣя сію пропорцію и $C: P = M: Q$, заключишь, что будетъ $A \pm B \pm C: P = K \pm L \pm M: Q$; и такъ далѣе.

176. Предложеніе XVI. Изъ пропорцій $A: B = C: D$, въ коей всѣ члены суть однородныя, происходитъ слѣдующая $A \pm C: B \pm D = A: B$ или $= C: D$.

По перемѣненіи данной пропорціи въ сію $A: C = B: D$ (169), получится $A \pm C: A = B \pm D: B$ (170); а изъ сей $A \pm C: B \pm D = A: B$ (169) или $= C: D$ (159); слѣдов. и проч.

177. Присовок. 1. Когда имѣемъ рядъ пропорціональныхъ однородныхъ величинъ $A: B = C: D = E: F$ и проч.; то будетъ $A \pm C \pm E: B \pm D \pm F = A: B$.

Изъ пропорцій $A: B = C: D$ происходятъ $A \pm C: B \pm D (= A: B) = E: F$; а изъ сей $A \pm C \pm E: B \pm D \pm F = E: F$ (176); чего ради $A \pm C \pm E: B \pm D \pm F = A: B$ (159); и такъ далѣе.

178. Присовок. 2. Когда же имѣемъ многія пропорціи $A: B = M: N$, $C: D = M: N$, $E: F = M: N$, и проч., въ коихъ третьи и четв-

вершые члены суть равные, каждый каждому, а первые и вторые однородные: то будетъ $A \pm C \pm E : B \pm D \pm F = M : N$.

Изъ данныхъ пропорцій имѣемъ $A : B = C : D = E : F$ (159); а отсюда $A \pm C \pm E : B \pm D \pm F = A : B$ (177); слѣд. и проч. (159).

КНИГИ ПЕРВОЙ ГЛАВА VII.

О приложеніи теоріи величинъ пропорціональныхъ къ прямымъ линіямъ и образованнымъ ими плоскостямъ.

179. Предложеніе I. А. Если стороны AB и AC треугольника (ABC) разсѣкутся прямою (DE) , параллельною его основанію (BC) : то сіи стороны съ своими отсѣками $(AD$ и $AE)$, отъ вершины (A) взятыми, составятъ пропорцію $(AB : AD = AC : AE)$.

Сторона AB съ своимъ отсѣкомъ AD , или имѣютъ общую мѣру, или не имѣютъ оной.

1) Пусть сторона AB съ отсѣкомъ AD No 1. имѣютъ общую мѣру величину AG . Проведи GH параллельно DE или BC (75); усмотришь, что AG и AH суть равночастны AD и AE , а AB и AC сѣхъ равночастныхъ равнократны (100 и 146); слѣдов. $AB : AD = AC : AE$ (151).

2) Пусть сторона AB съ отсѣкомъ AD No 2. общей мѣры не имѣютъ. Возьми отсѣка AD

какую ишесть частную AC (102) и проводи CH пр-ную DE или BC (75); потомъ по AC возми приближенный AX и AT стороны AB (150) и проводи XZ и TV пр-ныя BC ; усмотришь, что AC и AH суть равночастныя AD и AE , а AX и AT , приближенные AB , и AZ и AV , приближенные AC , тѣхъ равночастныхъ равнократны (100 и 146); слѣдов. $AB:AD = AC:AE$ (151).

180. Присовок. 1. Когда DE параллельна BC , то будетъ также $AB:BD = AC:CE = AD:BD = AE:CE$.

Изъ пропорціи $AB:AD = AC:AE$ имѣемъ $AB:AB - AD = AC:AC - AE$ и $AD:AB - AD = AE:AC - AE$ (170 и 161); но $AB - AD = BD$ и $AC - AE = CE$; слѣдов. $AB:BD = AC:CE$ и $AD:BD = AE:CE$.

181. Присовок. 2. При томъ же параллельномъ положеніи DE , въ разсужденіи BC , будетъ $BC:DE = AB:AD$ или $= AC:AE$.

Проведши DF пр-ную AC (75) найдемъ, что $BC:CF = AB:AD$ (179); но $CF = DE$ (96); слѣдов. $BC:DE = AB:AD$ или $= AC:AE$ (159).

182. Предложеніе II. С. Если изъ угла B треугольника (ABC) одинъ (BAC) раздѣлится прямою (AD) пополамъ и сія продолжится до пресѣченія основанія (BC) съ какою ишесть точкѣ (D); то произшедшіе отъ того отѣски (BD и CD) сего основанія съ сторонами (AB и AC) треугольника составятъ пропорцію ($BD:CD = AB:AC$).

На продолженной AB взявъ $AE = AC$, проводи прямую CE ; найдемъ, что уг. $ACE =$ уг. AEC (54) и уг. $BAC (=$ уг. $AEC +$ уг. $ACE) = 2$ уг. AEC (81); чего ради уг. $BAD =$

уг. AEC (147), AD прл-на CE (74) и $BD: CD = AB: AE$, то есть, $BD: CD = AB: AC$.

183. Предложеніе III. С. Если въ прл-моугольномъ треугольникѣ (ABC) изъ вершинъ (A) прл-аго угла на гипотенузу (BC) опустится перпендикуляръ (AD): то каждый изъ катетовъ (AB и AC) будетъ средня пропорціональная линіи между соотвѣдствующимъ изъ отсѣковъ (BD и BC) и гипотенузою; самый же перпендикуляръ будетъ средня пропорціональная между тѣми отсѣками. Черт. 52.

На AB возми часть $BE = BD$ и проведи EF прл-ную AC (75); найдешь, что $BE: AB = BF: BC$ (179) и $BE: AB = EF: AC$ (181); но въ треуг-хъ BEF и ADB , $BE = BD$ по строенію, уг. B общий и уг. $BEF =$ уг. BDA , какъ каждый прямой; чего ради $BF = AB$ и $EF = AD$ (71); почему предъидущія пропорціи сдѣлаются $BD: AB = AB: BC$ и $BD: AB = AD: AC$. Также докажется, что $CD: AC = AC: BC$ и $CD: AC = AD: AB$. Изъ нихъ вторая и четвертая, перемѣненные на сіи $BD: AD = AB: AC$ и $AD: CD = AB: AC$ (169 и 161), дають одну $BD: AD = AD: CD$ (159).

И такъ имѣемъ при пропорціи $BD: AB = AB: BC$, $CD: AC = AC: BC$ и $BD: AD = AD: CD$, кои и доказываютъ сіе предложеніе.

184. Предложеніе IV. Данную прямую (AB) разсѣть подобно данной разсѣтенной прямой (CD въ E, F), Черт. 53.

Отъ конца A проведи прямую AI , составляющую съ AB какой ниесъ уг. BAI ; возми части $AK = CE$, $KL = EF$, $LM = FD$ и проведи прямую MB и ей прл-ныя KP, LQ

(75); линия AB въ точкахъ P, Q , будетъ разсѣчена требуемымъ образомъ.

Ибо $AP: PQ = AK: KL$ (180); чего ради $AP: PQ = CE: EF$; потомъ $PQ: QB = KL: LM$ (170 и 175) и слѣдов. $PQ: QB = EF: FD$. И такъ, $AP: PQ: QB = CE: EF: FD$; слѣдов. и проч.

Черт. 54. 185. Предложеніе V. По даннымъ тремъ прямымъ (A, B и C) найти четвертую пропорціональную.

Проведи подъ какимъ нибудь угломъ двѣ прямыя EX и ET , возьми на одной $EF = A$ и $EG = B$, а на другой $EH = C$, проводи прямую FN и ей параллельную GK (75); прямая EK будетъ искомая. Ибо $EF: EG = EH: EK$ (179) и слѣдов. $A: B = C: EK$.

186. Присовокъ. Отсюда явствуетъ, какъ по даннымъ двумъ прямымъ найти третью пропорціональную. Ибо если возьмешь $C = B$, то EK будетъ третья пропорціональная двумъ даннымъ A и B .

Черт. 55. 187. Предложеніе VI. Между данными двухъ прямыхъ (A и B) найти среднюю пропорціональную.

Сіе можно учинить двоякимъ образомъ:

№ 1. 1) На неопредѣленной прямой CH возьми $CD = A$ и $CE = B$; изъ F , середины CE , опиши кругъ, линію и изъ D , поставивъ перпендикуляръ DG (57), проводи прямую CG , которая и будетъ искомая пропорціональная.

Проведши прямыя EG и FG , усмотришь, что треуг. CGE есть прямоугольный (121), въ коемъ $CD: CG = CG: CE$ (183), и слѣдов. $A: CG = CG: B$.

№ 2. 2) Опъ неопредѣленной прямой CH изъ $CD = A$ и $DE = B$, изъ F , середины CE , опиши

круг. линію, поставь изъ D перпендикуляръ, DC (57); оный и будетъ искомая средняя пропорціональная.

Проведши CG , EG и FG , усмотришь, что треуго. CGE есть прямоугольный (121), въ коемъ $CD:DC = DG:DE$ (183), и слѣдов. $A:DC = DC:B$.

188. Предложеніе VII. С. Данную пря-Черт. 56.
мую (AB) разсѣчь на двѣ части такъ, что-
бы одна изъ нихъ была средняя пропорціональ-
ная между всею прямою и остальною ея ча-
стію; что обыкновенно выражается такъ:
данную прямую (AB) разсѣчь въ крайнемъ и
среднемъ отношеніи.

Поставивъ изъ AB перпендикуляръ AC , ей рав-
ный, изъ середины онаго D , прямою DB , опиши
круг. линію; потомъ, продолживъ AC въ ту
и другую сторону до пресѣченія съ описан-
ною круг. линіею въ точкахъ E и F , воз-
ми $AG = AE$; AB въ точкѣ G будетъ разсѣ-
чена, какъ требовалось.

Въ предыдущемъ предложеніи доказа-
но, что $AF:AB = AB:AE$ и $AB:AF = AB =$
 $AE:AB = AE$ (170); но $AF - AB = AF - AC =$
 $CF = AE = AG$ и $AB - AE = AB - AG = BG$;
чего ради $AB:AG = AG:BG$.

189. Предложеніе VIII. Л. Если парал-Черт. 57.
лелограммъ ($ABCD$) и основаніе его (AB) раз-
сѣкнутся прямою (EF), параллельною сторо-
намъ (AD и BC) онаго: то параллелограммъ
сей такъ будетъ относиться къ одному изъ
своихъ отсѣковъ (AED), какъ основаніе его
(AB) относится къ своему отсѣку (AE).

Основаніе AB съ своимъ отсѣкомъ AE
или имѣютъ общую мѣру, или не имѣютъ.

No 1.

1) Пусть ось. AB съ отсѣкомъ AE имѣютъ общую мѣрою величину AG . Проведи GH прл-ную AD (75); заключишь, что сколько основ. AB есть крапн основ. AG , столько же и пгр. AC есть крапн пгр-ма AN и сколько основ. AG есть частно отсѣка AE , столько же и пгр. AN есть частн пгр-ма AF (105 и 146). И такъ пгр. AN пгр-ма AF и основ. AG отсѣка AE суть равночастны, а пгр. AC и основ. AB сихъ равночастныхъ равнокрапны; слѣдов. пгр. AC : пгр. $AF = AB$: AE (151).

No 2.

2) Пусть основ. AB съ отсѣкомъ AE общей мѣры не имѣютъ. Возми отсѣка AE какую внесешь частную AG (102) и по сей частной приближенныя AX и AT основанія AB ; проводи GH , XZ и TV прл-ныя AD (75); заключишь, что AG отсѣка AE и пгр. AN пгр-ма AF суть равночастны; а AX и AT , приближенныя основанія AB , и пгр-мы AZ и AV , приближенныя пгр-ма AC (150), сихъ равночастныхъ равнокрапны (105 и 146); слѣдов. пгр. AC : пгр. $AF = AB$: AE (151).

190. Присовок. Откуда слѣдуетъ, что отсѣки AF и EC параллелограмма AC отнесены между собою, какъ отсѣки AE и BE основанія его AB .

Пропорція пгр. AC : пгр. $AF = AB$: AE даетъ сію пгр. AF : пгр. AC — пгр. $AF = AE$: $AB - AE$ (170); но пгр. AC — пгр. $AF =$ пгр. EC и $AB - AE = BE$; слѣдов. и проч.

Черт. 58

191. Предложеніе IX. Параллелограммы (AC и EC), имѣющіе равныя высоты (DI и NK), отнесены между собою какъ основанія (AB и EF); или стоящіе на равныхъ основаніяхъ (AB и EF), какъ высоты (DI и NK).

1) На AB взявъ $AL = EF$, проводи LM перпендикулярную AD (75); получишь пер. $AM =$ пер. EG (109); но пер. AC : пер. $AM = AB:AL$ (189); слѣдов. пер. AC : пер. $EG = AB:EF$, ибо $AL = EF$. No 1.

2) На DI взявъ $IP = HK$, чрезъ P проводи MN перпендикулярную AB (75); получишь пер. $AN =$ пер. EG (109); но пер. AC : пер. $AN (= AD:AM) = DI:IP$ (189, 180 и 159); слѣдов. пер. AC : пер. $EG = DI:HK$. No 2.

192. Присовок. 1. Откуда слѣдуетъ, что и треугольники, имѣющіе равныя высоты, относятся между собою, какъ основанія; или стоящіе на равныхъ основаніяхъ, какъ высоты (110 и 160).

193. Присовок. 2. Отсюда же слѣдуетъ, что ежели четыре прямыя пропорціональны $A:B = C:D$; то и квадраты, составленные на нихъ, суть пропорціональны.

Изъ пропорціи $A:B = C:D$ имѣемъ кдр. $\overline{A}$: прмг. $\overline{A}, B = A:B$ и кдр. $\overline{C}$: прмг. $\overline{C}, D = C:D$ (191); чего ради кдр. $\overline{A}$: прмг. $\overline{A}, B =$ кдр. $\overline{C}$: прмг. $\overline{C}, D$ (159). Также докажется, что кдр. $\overline{B}$: прмг. $\overline{A}, B =$ кдр. $\overline{D}$: прмг. $\overline{C}, D$. Слѣдов. кдр. $\overline{A}$: кдр. $\overline{B} =$ кдр. $\overline{C}$: кдр. $\overline{D}$ (173).

194. Предложеніе X. Параллелограммы (AC и EG), у коихъ основанія (AB и EF) съ высотами (DI и HK) въ обратномъ порядкѣ составляютъ пропорцію ($AB:EF = HK:DI$), суть равны между собою. И обратно, у равныхъ параллелограммовъ основанія съ высотами въ обратномъ порядкѣ составляютъ пропорцію. Черт. 59.

1) Отъ большаго основ. AB возьми $AL = EF$ и проводи LM перпендикулярную AD (75); будешь

нгр. AC : нгр. $AM = AB:AL (= EF)$ и нгр. EG : нгр. $AM = HK:DI$ (191); но $AB:EF = HK:DI$ по положенію; чего ради нгр. AC : нгр. $AM =$ нгр. EG : нгр. AM (159), и слѣдов. нгр. $AC =$ нгр. EG (165).

2) Пусть нгр. $AC =$ нгр. EG ; сдѣлавъ тоже строеніе, находимъ, что нгр. AC : нгр. $AM = AB:AL (= EF)$ (189); но нгр. EG : нгр. $AM = HK:DI$ (191) и нгр. $AC =$ нгр. EG по положенію; слѣдов. $AB:EF = HK:DI$ (159).

195. *Присовок. 1.* Опекуда слѣдуетъ, что ежели четыре прямыя пропорціональны A ; $B = C$; D , то прямоугольникъ изъ крайнихъ равенъ прямоугольнику изъ среднихъ; посему въ примѣ-мъ треуг. ABC , кдр. $\overline{AB} =$ примг. $\overline{BC}, \overline{BD}$, кдр. $\overline{AC} =$ примг. $\overline{BC}, \overline{CD}$ и кдр. $\overline{AD} =$ примг. $\overline{BD}, \overline{CD}$ (185), то есть, тѣже самыя заключенія, кои выведены изъ предложенія VIII-го Главы IV-й (117 и 118).

196. *Присовок. 2.* Тоже самое, что сказано въ семь предложеніи о параллелограммахъ, надлежитъ разумѣть и о треугольникахъ (111).

Черт. 60. 197. *Предложеніе XI. С.* Данный параллелограммъ ($ABCD$), или треугольникъ (ABD) обратить въ другой, имѣющій данное основаніе или данную высоту (P) и данной при основаніи уголъ (Q).

Проведи въ нгр. $ABCD$ или треуг. ABD высоту DE (59), сыщи по тремъ прямымъ P , DE и AB четвертую пропорціональную X (185) и составь нгр. $CHIK$, или треуг. CHK , имѣющій основ. $CH = P$, выс. $KL = X$ и уг. $KGH =$ уг. Q , или выс. $KL = P$, а основ. $CH = X$ и уг. $KCH = Q$ (112); оный

и будетъ требуемый, какъ то изъ предъидущаго предложенія очевидно явствуемъ.

135. Предложеніе XII. Данный много-Черт. 61.
угольникъ ($ABCDE$) пропущенными прямыми отъ вершины (A) одного изъ угловъ его разсѣтъ подобно данной прямой (FG), разсѣченной въ какихъ нѣтъ точкахъ (H и I).

Данный многоуг. $ABCDE$ обрати въ треуг. PSV , составляя по предъидущему XI-му предложенію съ произвольною высотой PV треуг. $PQV =$ треуг. ABC , треуг. $QRV =$ треуг. ACD и треуг. $RSV =$ треуг. ADE ; по томъ основаніе PS треуг-ка PSV разсѣки въ точкахъ X и Y подобно данной прямой FG , разсѣченной въ точкахъ H и I (184) и проведи прямыя XV и YV ; оный треуг. PSV сими прямыми разсѣчется подобно прямой FG , какъ то изъ присовокупленія 1-го къ предложенію IX-му (192) очевидно явствуемъ. Теперь, чинобы тоже учинить съ даннымъ многоуг. $ABCDE$, надлежитъ токмо въ треуг. ABC присовокупить треуг. QXV и къ треуг. ACD , уменьшенному треуг-мъ QXF , присовокупить треуг. RYV ; чего ради разсѣки стороны CD и DE даннаго многоугольника въ K и L , подобно какъ разсѣчены QR и RS въ X и Y (184), и проведи AK и AL ; чрезъ что требуется будетъ сдѣлано, то есть, получишь треуг. $ACK =$ треуг. QXV и треуг. $ADL =$ треуг. RYV .

Треуг. ACD : треуг. $ACK = CD:CK$ (192) и $CD:CK = QR:QX$ по строенію; посему треуг. ACD : треуг. $ACK = QR:QX$ (159); но и треуг. QRV : треуг. $QXV = QR:QX$; чего ради треуг. $ACK =$ треуг. QXV (166), ибо треуг. $QRV =$ треуг. ACD по составленію. Такъ

же докажешь, что и треуг. $ADL =$ треуг. KTV .

И такъ данный многоуг. $ABCDE$ прямыми AK и AL разсѣченъ подобно, какъ разсѣчена въ точкахъ H и I данная прямая FG .

199. *Присовок.* Отсюда явствуетъ, какъ данный многоугольникъ прямыми, проходящими изъ вершины одного изъ угловъ его, раздѣлить на сколько ниешъ равныхъ частей.

Черт 62. 200. *Предложеніе XIII.* По даннымъ двумъ многоугольникамъ (M и N) и данной прямой линіи (P) опредѣлить другую прямую, къ которой бы данная (P) такъ относилась, какъ одинъ данный многоугольникъ (M) относится къ другому (N).

Многоуг.-ки M и N обрати въ треуг.-ки ABC и DEF , имѣющіе равныя высоты AC и DF (141 и 197); потомъ по тремъ прямымъ AB , DE и P сыщи четвертую Q такую, чтобы имѣла мѣсто пропорція $AB:DE=P:Q$ (185); оная Q будетъ искомая.

Ибо треуг. ABC : треуг. $DEF (=AB:DE) = P:Q$ (192 и 159); но треуг. $ABC =$ многоуг. M и треуг. $DEF =$ многоуг. N по строенію; чего ради многоуг. M : многоуг. $N = P:Q$.



КНИГИ ПЕРВОЙ ГЛАВА VIII.

О подобіи многоугольниковъ.

~~~~~

201. *Опредѣленіе.* Многоугольники называются подобными, кои имѣютъ споронны равномногія, однѣ другимъ пропорціональныя, и въ коихъ сіи спороны дѣлаютъ углы одного многоугольника равными угламъ другаго, каждый каждому.

202. *Присовок.* Откуда слѣдуетъ, что правильные многоугольники, имѣющіе равномногія спороны, или все то же, равномногіе углы, суть подобны. Ибо въ такихъ многоугольникахъ всѣ спороны и всѣ углы суть равныя (155) и равномногіе; посему первыя пропорціональны, каждая каждой (155 или 157), а изъ другихъ каждый уголъ одного многоугольника равенъ каждому углу другаго (159 и 147).

203. *Предложеніе I.* Въ треугольникахъ, равные углы имѣющихъ, спороны сіи углы содержащія суть пропорціональны и оныя треугольники подобны.

Пусть въ треуг-хъ  $ABC$  и  $DEF$ , уг.  $BAC =$  уг.  $EDF$ , уг.  $ABC =$  уг.  $DEF$  и уг.  $ACB =$  уг.  $DFE$ . Отъ большей  $AB$  изъ двухъ сходственныхъ споронъ  $AB$  и  $DE$  возьми  $AG = DE$  и проведи  $GH$  паралл.  $BC$  (75); будетъ, уг.  $AGH (=$  уг.  $ABC) =$  уг.  $DEF$  и треуг.  $AGH =$  треуг.  $DEF$  (71); почему  $AH = DF$  и  $GH = EF$ ; но  $AB:AG = AC:AH$  (179) и  $BC:GH = AB:AG$  или  $= AC:AH$  (181); слѣдов.

Черт. 63.



равны между собою и  $AB:DE = AC:DF$ . Сдѣлавъ тоже строеніе, что и въ предыдущемъ предложеніи, найдешь, что  $AB:AC = AC:AH$  (179); но  $AB:DE = AC:DF$  по положенію и  $DE = AG$  по строенію; чего ради  $DF = AH$  (166) и треуг.  $DEF =$  треуг.  $ACH$  (44 или 68). И такъ треуг-ки  $ABC$  и  $DEF$ , въ коихъ уг.  $BAC =$  уг.  $DEF$  или уг.  $ABC (=$  уг.  $ACH) =$  уг.  $DEF$  по положенію и уг.  $ACB (=$  уг.  $AHG) =$  уг.  $DFE$  по доказанному, суть подобны (205).

Впрочемъ подобіе треуг-въ  $ABC$  и  $DEF$ , въ случаѣ равенства угловъ  $ABC$  и  $DEF$  и пропорціональности несодержащихъ сіи углы сторонъ, тогда не подлежаши никакому сомнѣнію, когда относительно прочихъ угловъ, несодержимыхъ тѣми же сторонами, будетъ имѣть мѣсто условіе, изъясненное Главы II-й въ предложеніи XIII (68).

207. Предложеніе IV. С. Подобные многоугольники состоятъ изъ равномногохъ подобныхъ треугольниковъ.

Пусть таковыя многоут-ки  $ABCDE$  и  $FGHIK$ . Изъ вершинъ сходственныхъ угловъ проводи діагонали  $AC, AD, FH =$  и  $FI$ ; чрезъ что многоугольники раздѣляясь на равномногіе треугольники (136). Потомъ взявъ треуг-ки  $ABC$  и  $FGH$ , усмотришь, что въ нихъ уг.  $ABC =$  уг.  $FGH$  и  $AB:FG = BC:GH$  (201) и что посему они подобны (206). Треуг-ки  $ACD$  и  $FHI$  также суть подобны (206), ибо въ нихъ уг.  $ACD (=$  уг.  $(BCD - BCA)) =$  уг.  $FHI (=$  уг.  $(GHI - GHF))$  и  $AC:FH (= BC:GH) = CD:HI$  (201 и 159). Наконецъ подобіе треуг-въ  $ADE$  и  $FIK$  докажется или

симъ же образомъ, или какъ доказано подобіе треуг-въ  $ABC$  и  $FGH$ . Слѣдов. и проч.

Черт. 64.

208. Присовок. Отсюда имѣемъ средство на какой ни есть прямой  $AB$  составить многоуг., подобный данному многоуг.  $FGHIK$ .

Проведи въ данномъ многоуг.  $FGHIK$  діагонали  $FH$  и  $FI$ , чрезъ что оный раздѣлился на треуг-ки  $FGH$ ,  $FHI$  и  $FIK$ ; потомъ составь на  $AB$  треуг.  $ABC$ , подобный треуг-ку  $FGH$ ; на  $AC$  треуг.  $ACD$ , подобный треуг-ку  $FHI$  и на  $AD$  — треуг.  $ADE$ , подобный треуг-ку  $FIK$  (204); опъ чего получишь многоуг.  $ABCDE$ , подобный данному многоуг.  $FGHIK$  (207).

209. Предложеніе V. Подобныя параллелограммы относятся между собою, какъ квадраты изъ сходственныхъ ихъ сторонъ и высотъ.

Черт. 65.

Пусть таковыя параллелограммы  $AC$  и  $EG$ , у коихъ высоты  $DI$  и  $HK$ . Представимъ, что на  $AB$  и  $EF$  составлены квадраты; найдемъ, что кдр.  $\overline{AB}$ : пгр.  $AC = AB:DI$  и кдр.  $\overline{EF}$ : пгр.  $EG = EF:HK$  (191); но  $AB:DI = EF:HK$ , ибо прмг-ные треуг.  $ADI$  и  $ЕНК$  (203) и пгр-мы  $AC$  и  $EG$  по положенію суть подобны; чего ради кдр.  $\overline{AB}$ : пгр.  $AC =$  кдр.  $\overline{EF}$ : пгр.  $EG$  (159) и пгр.  $AC$ : пгр.  $EG =$  кдр.  $\overline{AB}$ : кдр.  $\overline{EF} =$  кдр.  $\overline{DI}$ : кдр.  $\overline{HK}$  (169, 193 и 159).

210. Присовок. Откуда слѣдуетъ, что подобныя треугольники также относятся между собою, какъ квадраты изъ сходственныхъ ихъ сторонъ и высотъ (95 и 160).

211. Предложеніе VI. Вообще подобныя многоугольники такъ относятся между собою, какъ квадраты изъ сходственныхъ ихъ сторонъ.

Пусть таковыя многоуг-ки  $ABCDE$  и  $FGHIK$ . Проведи изъ вершинъ сходственныхъ угловъ діагонали  $AC, AD, = FH$  и  $FI$ ; оныя раздѣляють многоугольники на равномногіе и подобныя треуг-ки  $ABC$  и  $FGH, ACD$  и  $FHI, ADE$  и  $FIK$  (207); почему треуг.  $ABC$ : треуг.  $FGH = \text{кдр. } \overline{BC} : \text{кдр. } \overline{GH}$ , треуг.  $ACD$ : треуг.  $FHI = \text{кдр. } \overline{CD} : \text{кдр. } \overline{HI}$  и треуг.  $ADE$ : треуг.  $FIK = \text{кдр. } \overline{DE} : \text{кдр. } \overline{IK}$  (210); но  $DE:IK = CD:HI = BC:GH = AB:FG$  (201) и кдр.  $\overline{DE} : \text{кдр. } \overline{IK} = \text{кдр. } \overline{CD} : \text{кдр. } \overline{HI} = \text{кдр. } \overline{BC} : \text{кдр. } \overline{GH} = \text{кдр. } \overline{AB} : \text{кдр. } \overline{FG}$  (193); посему треуг.  $ABC$ : треуг.  $FGH = \text{кдр. } \overline{AB} : \text{кдр. } \overline{FG}$ , треуг.  $ACD$ : треуг.  $FHI = \text{кдр. } \overline{AB} : \text{кдр. } \overline{FG}$  и треуг.  $ADE$ : треуг.  $FIK = \text{кдр. } \overline{AB} : \text{кдр. } \overline{FG}$  (159); слѣдов. многоуг.  $ABCDE$ : многоуг.  $FGHIK = \text{кдр. } \overline{AB} : \text{кдр. } \overline{FG}$  (178).

212. Предложеніе VII. Когда на кате-тахъ ( $AB$  и  $AC$ ) и гипотенузѣ ( $BC$ ) прямо-угольнаго треугольника ( $ABC$ ) составятся подобныя многоугольники ( $P, Q$  и  $R$ ): то первые два изъ оныхъ равны третьему ( $P+Q=R$ ).

По доказанному предъ симъ  $P:Q = \text{кдр. } \overline{AB} : \text{кдр. } \overline{AC}$  (211); почему  $P:P+Q = \text{кдр. } \overline{AB} : \text{кдр. } \overline{AB} + \text{кдр. } \overline{AC}$  (170); но также  $P:P+Q = \text{кдр. } \overline{AB} : \text{кдр. } \overline{BC}$  (211) и кдр.  $\overline{AB} + \text{кдр. } \overline{AC} = \text{кдр. } \overline{BC}$  (115); чего ради  $P+Q:R =$

кдр.  $\overline{AB} + \text{кдр. } \overline{AC} : \text{кдр. } \overline{BC}$  (173) и  $P+Q=R$  (162).

213. *Примечан.* Откуда явствуетъ, что при совокупленіи однихъ подобныхъ многоугольниковъ съ другими и отъясніи однихъ подобныхъ многоугольниковъ отъ другихъ поступить надлежитъ точно такъ, какъ поступлено было при таковыхъ дѣйствіяхъ съ квадратами (119 и 120).

*Примѣч.* Сей способъ приложенъ быть можетъ къ совокупленію и отъяснію многоугольниковъ и неподобныхъ, обращая ихъ въ подобные; что въ слѣдующемъ и показано будетъ.

Черт. 67. 214. *Предложеніе VIII. С.* По данному многоугольнику ( $ABCDE$ ) составить другой ему подобный ( $M$ ), который бы къ данному такъ относился, какъ данная прямая ( $P$ ) къ другой данной прямой ( $Q$ ).

На неопредѣленной прямой возьми  $FG=Q$  и  $GH=P$ , на  $GH$  опиши кругъ. линію, изъ  $G$  поставъ перпендикуляръ  $GI$  (51), проводи неопредѣленныя  $IF$  и  $IH$ ; отъ  $IF$ , коей  $AB$  можетъ бытьъ равна, больше или меньше, возьми  $IK=AB$  и проводи  $KL$  параллельную  $FH$  (75);  $IL$  будетъ сторона искомаго многоуг.  $M$ .

Треуг.  $FIH$  есть прямоугольный (121); посему кдр.  $\overline{IF} : \text{кдр. } \overline{IH} = \text{прмт. } \overline{FG}, \overline{FH} : \text{прмт. } \overline{GH}, \overline{FH} = FG : GH$  (195, 157 и 191); но  $IF : IH = IK : IL$  (179) и кдр.  $\overline{IF} : \text{кдр. } \overline{IH} = \text{кдр. } \overline{IK} : \text{кдр. } \overline{IL}$  (193); чего ради кдр.  $\overline{IK} : \text{кдр. } \overline{IL} = FG : GH = Q : P$  (159). Теперь если на прямой  $= IL$  составишь многоуг.  $M$ , подобный данному многоуг.  $ABCDE$  (208); то найдешь, что многоуг.  $ABCDE : \text{многоуг. } M$

(= кдр.  $\overline{IK}$ : кдр.  $\overline{IL}$ ) =  $Q:P$  и многоуг.  $M$ : многоуг.  $ABCDE = P:Q$  (161); слѣдов. и проч.

215. Предложеніе IX. С. По даннымъ двумъ многоугольникамъ ( $M$  и  $N$ ) составить третій, который бы одному ( $M$ ) былъ равенъ, а другому ( $N$ ) подобенъ; или все то же, одинъ данный многоугольникъ ( $M$ ) обратить въ подобный другому данному ( $N$ ). Черт. 62

Многоуг.-ки  $M$  и  $N$  обрати въ треуг.  $ABC$  и  $DEF$ , имѣющіе равныя высоты  $AC$  и  $DF$  (141 и 197); потомъ составь многоуг.  $O$ , подобный многоуг.-ку  $N$  (206), который бы имѣлъ къ сему такое отношеніе, какое имѣютъ между собою основанія  $AB$  и  $DE$  треуг.-въ  $ABC$  и  $DEF$  (214); оный многоуг.  $O$  будетъ требуемый.

Многоуг.  $O$ : многоуг.  $N = AB:DE$  по строенію и треуг.  $ABC$ : треуг.  $DEF = AB:DE$  (192); но многоуг.  $N =$  треуг.  $DEF$ ; чего ради многоуг.  $O =$  треуг.  $ABC$  и слѣдов. многоуг.  $O =$  многоуг.  $M$ .

Примѣч. Въ сихъ двухъ вопросахъ заключаются шѣ, о которыхъ упомянуто было въ началѣ теоріи величинъ пропорціональных.



# КНИГА ВТОРАЯ.

О свойствахъ, которыя имѣютъ мѣсто  
при взаимномъ сопряженіи круговой ли-  
ніи съ прямыми.

---

Въ сей книгѣ вопервыхъ представляет-  
ся намъ сопряженіе круговой линіи съ пря-  
мыми, не заключающими собою опредѣлен-  
наго пространства; потомъ сопряженіе ея  
съ прямыми, заключающими собою опредѣ-  
ленное пространство; наконецъ сравненіе  
круга съ пространствомъ прямолинейнымъ  
и взаимное отношеніе самыхъ круговъ и  
ихъ окружностей. И такъ непосредственно  
и естественно изслѣдованію нашему въ сей  
книгѣ представляются три предмета. Но  
къ послѣднему изъ оныхъ не иначе присту-  
пить можно, какъ зная прѣдѣ начало пер-  
воначальной Геометріи (50); почему въ сію  
книгу надлежитъ ввести еще одинъ пред-  
метъ, то есть, теорію предѣловъ.

И такъ вторая книга Основаній Геоме-  
тріи состоятъ будетъ изъ слѣдующихъ  
главъ:

I. Собственно о прямыхъ, съ круговою  
линіею сопряженныхъ, и углахъ, ими соста-  
вляемыхъ.

II. О многоугольникахъ въ кругѣ впи-  
санныхъ и около онаго описанныхъ.

III. О теоріи предѣловъ.

IV. О сравненіи круга съ пространствомъ  
прямолинейнымъ и взаимномъ отношеніи  
самыхъ круговъ и ихъ окружностей.

---

## КНИГИ ВТОРОЙ ГЛАВА I.

Собственно о прямыхъ, съ круговою линіею сопряженныхъ, и углахъ, ими составляемыхъ.

Глава сія естественно состоятъ изъ двухъ отдѣленій: 1) изъ отдѣленія собственно о прямыхъ, съ круговою линіею сопряженныхъ, и 2) изъ отдѣленія объ углахъ, тѣми прямыми составляемыхъ. И такъ

## ГЛАВЫ I-й ОТДѢЛЕНИЕ I-е.

216. Предложеніе I. А. Даннаго круга черт. 68. (ABC) найти центръ.

Взявъ на окружности сего круга точки  $A$  и  $B$ , соедини ихъ прямою  $AB$ , изъ середины ея  $D$  поставь перпендикуляръ  $DC$  (53 и 51), продолжи его въ противную сторону до  $E$  и раздьли  $CE$  въ точкѣ  $F$  пополамъ (58); точка сія будетъ центръ круга.

Если не она, то пусть будетъ центръ круга какая нибудь другая точка  $G$ , которая, какъ то явно, не можешь находиться на  $CE$  (25). Проведи прямыя  $GA$ ,  $GB$  и  $GD$ ; найдемъ, что  $GA = GB$ , какъ радіусы круга,  $AD = BD$  по строенію и  $DC$  общая; почему въ треуг-хъ  $ADC$  и  $BDC$  уг.  $ADC = \text{уг. } BDC$  (47) и  $DC$  перпендикулярна къ  $AB$  (34); что невозможно (52); слѣдов. точка  $F$  (25) есть центръ круга  $ABC$ .

217. Присовок. Отсюда явствуетъ, что перпендикуляръ, поставленный изъ среди-

ны прямой, сопрягающей какия нивесты, днѣ точки окружности, проходить чрезъ центръ круга (52); а опущенный изъ центра круга на такую прямую падаетъ въ средину оной (61).

Черт. 68. 218. Предложеніе 14. Прямая (AB) пересѣкаетъ окружность круга (ABC) только въ двухъ точкахъ (A и B).

Если AB пересѣкаетъ окружность круга въ трехъ точкахъ: то всѣ сіи точки прямой AB будутъ равно отстоятъ отъ центра F (25); что невозможно (66).

Отсюда происходятъ слѣдующія опредѣленія:

Черт. 68. 219. Опредѣленіе I. Всякая часть (ACB или AEB) круговой линіи (ABC) называется дугою.

220. Опредѣленіе II. Прямая (AB), сопрягающая концы дуги (ACB или AEB), именуется ея хордою.

221. Опредѣленіе III. Хорда (CE), проходящая чрезъ центръ круга, называется его діаметромъ.

222. Присовок. 1. Отсюда слѣдуетъ, что всякая хорда, собственно такъ называемая, меньше діаметра; ибо она меньше двухъ радіусовъ, имѣя въ началѣ взятыхъ.

223. Присовок. 2. Въ кругѣ всѣ радіусы равны; посему и всѣ діаметры также равны.

224. Присовок. 3. А изъ сего слѣдуетъ, что прямая, большая діаметра, въ кругѣ помѣститься не можетъ.

Черт. 69. 225. Предложеніе III. Въ кругѣ (ABCD) хорды (AB и CD), равно отстоящія отъ центра (E), равны между собою; и обратно: равныя хорды равно отстоятъ отъ центра.

1) Пусть перпендикуляры  $EF$  и  $EG$ , опущенные из центра  $E$  на хорды  $AB$  и  $CD$ , равны между собою. Проведи радиусы  $BE$  и  $CE$ ; найдешь, что въ треугольн.  $BEF$  и  $CEG$ ,  $BE = CE$ , какъ радиусы круга,  $EF = EG$  по положенію и уг.  $BFE = \text{уг. } CCE$ , какъ каждый прямой (35); почему  $BF = CG$  (69); но  $F$  и  $G$  суть середины хорды  $AB$  и  $CD$  (217); чего ради и самыя хорды  $AB$  и  $CD$  равны между собою (147).

2) Опустив на равныя хорды  $AB$  и  $CD$  перпендикуляры  $EF$  и  $EG$  (59); сія перпендикулярны раздѣляютъ ихъ пополамъ (217); и въ треугольн.  $BEF$  и  $CEG$ ,  $BE = CE$ , какъ радиусы круга,  $BF = CG$  по положенію и уг.  $BFE = \text{уг. } CCE$ , какъ каждый прямой (35); чего ради  $EF = EG$  (69).

226. Предложеніе IV. Прямая ( $AB$ ), проведенная отъ конца ( $A$ ) радиуса ( $CA$ ) круга ( $ADE$ ), перпендикулярно къ оному, падаетъ внѣ сего круга и прилежитъ къ круговой линіи столь близко, что между ними грезъ обшую ихъ точку ( $A$ ) ни единой прямою провести не можно. Черт. 70.

Вопервыхъ возми на  $AB$  какую ниешть точку  $F$  и проводи  $CF$ ; будетъ  $CF > CA$  (65) и потому точка  $F$  находится внѣ круга; тоже самое докажется и о всякой точкѣ прямой  $AB$ ; слѣдов.  $AB$  падаетъ внѣ круга.

Вовторыхъ пусть проведена будетъ изъ  $A$  въ уголъ  $CAE$ , какъ ниешть, прямая  $AG$ ; опусти на нее перпендикуляръ  $CH$  (59); усмотришь, что уголъ  $CAE$  острый (62) и  $CH < CA$  (64); почему точка  $H$  и  $AG$ , на коей сія точка находится, суть внутри круга. Слѣдов. между круг. линією  $ADE$  и прямою  $AB$

чрезъ общую ихъ точку  $A$  ни единой прямой провести не можно.

Отсюда происходить слѣдующее опредѣленіе:

Черт. 70.

227. *Опредѣленіе IV.* Когда прямая ( $BA$ ), встрѣчаясь съ круговою линіею ( $AEC$ ) въ какой нѣсть точки ( $A$ ), прилежитъ къ ней съ выпуклой ея стороны столь близко, что между сею прямою и круговою линіею чрезъ точку ихъ встрѣчи ( $A$ ) ни единой прямой провести не можно: то она прямая называется касательною къ круговой линіи ( $ADE$ ) въ той точкѣ ( $A$ ).

228. *Присовок. 1.* Отсюда явствуетъ, что въ какой нѣсть точки  $A$  къ круговой линіи  $AEC$  болѣе одной касательной  $AB$  провести не можно.

229. *Присовок. 2.* Отсюда же и изъ предыдущаго предложенія явствуетъ, что прямая, проведенная отъ конца радіуса перпендикулярно къ оному, есть касательная къ окружности круга, описаннаго симъ радіусомъ.

230. *Присовок. 3.* А изъ сего слѣдуетъ, что перпендикуляръ, поставленный изъ точки касанія на касательной, проходитъ чрезъ центръ круга (52).

Отсюда также имѣемъ средство проводить къ круговой линіи касательныя, какъ явствуетъ изъ слѣдующаго:

Черт. 71.

231. *Предложеніе V.* С. Отъ данной точки ( $A$ ) къ данной круговой линіи ( $BCD$ ) провести касательную ( $AF$ ).

Точка  $A$  можетъ быть дана или на круговой линіи, или внѣ круга, но не внутри его (227); но два случая здѣсь имѣютъ мѣсто:

1) Пусть точка  $A$  дана на круговой линіи; сыскавъ центръ круга (216), проводи радиусъ  $EA$  и поставь на немъ перпендикуляръ  $AF$  (51); оный и будетъ требуемая касательная въ точку  $A$  къ круг. линіи  $BGD$  (220). No 1.

2) Пусть точка  $A$  дана внѣ круга; сыскавъ центръ оного  $E$  (216), проводи прямую  $EA$ , пресѣкающую круг. линію  $BGD$  въ  $B$ ; изъ  $E$ , радиусомъ  $EA$ , опиши круг. линію  $AH$ , изъ  $B$  на  $EA$  поставь перпендикуляръ  $BC$  (51) и проводи  $EC$ , пресѣкающую круг. линію  $BGD$  въ  $F$ , и прямую  $AF$ ; сія прямая и будетъ касательная къ круг. линіи  $BGD$ , отъ точки  $A$  проведенная. No 2.

Въ треугольнѣхъ  $AFE$  и  $CBE$ ,  $AE = CE$ ,  $BE = FE$ , какъ радиусы круговъ  $AH$  и  $BGD$ , и уг.  $BEF$  общій: почему уг.  $AFE =$  уг.  $CBE =$  п. уг. (44); слѣдов. и проч. (229).

232. Присовокъ. Продолжи  $BC$  въ противную сторону до пресѣченія съ круг. линією  $AH$  въ  $I$  и проводи  $EI$  и  $AK$ ; сія  $AK$  также будетъ касательная къ круг. линіи  $BGD$  и равна касательной  $AF$  (69). Откуда слѣдуетъ, что отъ данной внѣ круга точки, могутъ быть проведены двѣ касательныя къ его окружности и при томъ равныя.

## ГЛАВЫ I-й ОТДѢЛЕНІЕ II-е.

233. Опредѣленіе V. Всякая часть ( $ABC$  черт. 72. или  $ADC$ ) круга ( $ABGD$ ), содержащаяся между дугою ( $ABC$  или  $ADC$ ) сего круга и ея

хордою ( $AC$ ), называюща<sup>ся</sup> *сегментомъ* или *окръжкомъ* круга.

234. *Присовокъ*. Хорда, на коей представля<sup>етъ</sup> сегментъ стоящимъ, *основаніемъ* его именуется.

235. *Опредѣленіе VI*. Уголъ ( $ABC$ ), стоящій на основаніи ( $AC$ ) сегмента ( $ABCA$ ) и имѣющій вершину свою ( $B$ ) на его дугѣ ( $ABC$ ), называется *угломъ въ сегментѣ*.

236. *Опредѣленіе VII*. Когда при центрѣ ( $O$ ) круга ( $ABCD$ ) стоимъ уголъ ( $AOC$ ); то часть онаго круга ( $OABC$ ), содержащаяся между сторонами ( $OA$  и  $OC$ ) сего угла и дугою ( $ABC$ ), или отъ окружности отсѣченною, называется *секторомъ* или *изсѣткомъ* круга.

Черт. 73.

237. *Предложеніе VI*. А. Въ кругѣ ( $ABC$ ) уголъ ( $BDC$ ) при центрѣ ( $D$ ) есть двукратный угла ( $BAC$ ) при окружности, когда они стоимъ на той же дугѣ ( $BC$ ).

Центръ  $D$  можетъ находиться или на одной изъ сторонъ, содержащихъ уголъ при окружности, или внутри сего угла, или внѣ онаго, посему

№ 1. Пусть будетъ центръ  $D$  на  $BA$ . Въ треуг.  $ADC$  уг.  $DAC = \text{уг. } DCA$  ( $54^\circ$ ); но уг.  $BDC = \text{уг. } DAC + \text{уг. } DCA$  ( $81^\circ$ ); слѣдов. уг.  $BDC = 2 \text{ уг. } BAC$ .

№ 2. Пусть будетъ центръ  $D$  внутри уг.  $BAC$ . Проведи изъ  $A$  чрезъ  $D$  прямую  $ADE$ ; по первому случаю будетъ уг.  $BDE = 2 \text{ уг. } BAE$  и уг.  $EDC = 2 \text{ уг. } EAC$ ; чего ради уг.  $BDC = 2 \text{ уг. } BAC$ .

№ 3. Наконецъ пусть центръ  $D$  внѣ уг.  $BAC$ . Проведи изъ  $A$  чрезъ  $D$  прямую  $ADE$ ; по первому случаю будетъ уг.  $CDE = 2 \text{ уг. } CAE$ .

$\angle ABE$  и  $\text{уг. } BDE = 2 \text{ уг. } BAE$ ; чего ради  $\text{уг. } BDC = 2 \text{ уг. } BAC$ .

238. Предложение VII. Углы ( $BAC$ ,  $BDC$ , Черт. 74.  $BEC$ ), стоящие на той же дуге ( $BFC$ ), или об той же сегменты ( $BDC$ ), суть равны между собою.

Каждый изъ угловъ  $BAC$ ,  $BDC$ ,  $BEC$  есть половина угла при центрѣ, стоящаго на дугѣ  $BFC$  (237); слѣдов. и проч. (147).

239. Присовок. 1. Уголъ  $BAD$ , стоящій Черт. 75. на діаметрѣ  $BD$  круга  $ABD$ , есть прямой.

Проведи радіусъ  $AC$ : доказательство сего присовокупленія само собою предсказавшася (121).

240. Присовок. 2. Уголъ  $BAC$  въ большемъ Черт. 74. сегментѣ  $BDC$  круга есть острый, а уголъ  $BFC$  въ меньшемъ сегментѣ  $BFC$  круга есть тупой.

Проведи діаметръ  $BCH$  и прямыя  $AH$  и  $FH$ : увидишь, что  $\text{уг. } BAC < \text{уг. } BAH (= \text{п. уг.})$  и потому острый (36); а  $\text{уг. } BFC > \text{уг. } BFH (= \text{п. уг.})$  и потому тупой (36).

241. Присовок. 3. Углы  $BAC$  и  $BFC$  въ двухъ сегментахъ, имѣющихъ общее основаніе  $BC$ , равны двумъ прямымъ.

Проведи прямую  $AF$ ; найдешь, что  $\text{уг. } BAF = \text{уг. } BCF$  и  $\text{уг. } CAF = \text{уг. } CBF$  (238); но  $\text{уг. } BCF + \text{уг. } CBF + \text{уг. } BFC = 2 \text{ п. уг.}$  (81); чего ради  $\text{уг. } BAC + \text{уг. } BFC = 2 \text{ п. уг.}$

242. Предложение VIII. С. Если въ кру- Черт. 76. гѣ ( $ACBD$ ) двѣ хорды ( $AB$  и  $CD$ ) взаимно пересекаются внутри круга въ какой нибудь точкѣ ( $E$ ); то прямоугольникъ изъ отсѣковъ ( $AE$  и  $BE$ ) одной, равенъ будетъ прямоугольнику изъ отсѣковъ ( $CE$  и  $DE$ ) другой.

Проведи прямые  $AC$ ,  $BC$ ,  $BD$  и  $AD$ ; най-  
дешь, что  $\text{уг. } ABD = \text{уг. } ACD$  и  $\text{уг. } BDC = \text{уг. } BAC$  (258); почему въ треугольн-хъ  $AEC$  и  $BED$   
будетъ  $AE:DE = CE:BE$  (82 и 205) и прмг.  $AE, BE = \text{прмг. } CE, DE$  (195).

Черт. 77.

243. Предложеніе IX. С. Если двѣ хор-  
ды ( $AB$  и  $CD$ ) круга ( $ABDC$ ), продолженныя,  
взаимно пресекаются внѣ оного въ какой ни-  
сестъ точкѣ ( $E$ ): то прямоугольникъ изъ од-  
ной прямой ( $AE$ ) и отсѣка ея ( $BE$ ) равенъ бу-  
детъ прямоугольнику изъ другой прямой ( $CE$ )  
и отсѣка ея ( $DE$ ).

Проведи прямые  $AD$  и  $BC$ ; найдешь, что  
въ треугольн-хъ  $ADE$  и  $CBE$ ,  $\text{уг. } BAD = \text{уг. } BCD$   
(258) и  $\text{уг. } AEC$  общій; почему будетъ  $AE:$   
 $DE = CE:BE$  (82 и 205) и прмг.  $AE, BE =$   
 $\text{прмг. } CE, DE$  (195).

Черт. 78.

244. Предложеніе X. Углы ( $BAE$  и  $BAF$ ),  
составляемые общими основаніемъ ( $AB$ ) двухъ  
сегментовъ круга ( $ACBD$ ) и его касательною  
( $EF$ ), равны угламъ въ тѣхъ же сегментахъ,  
въ обратномъ порядкѣ взятыхъ.

№ 1.

1) Если  $AB$ , общее основаніе сегмен-  
товъ, проходитъ чрезъ центръ круга; то  
явно, что углы  $BAE$  и  $BAF =$  угламъ сег-  
м-въ  $ADB$  и  $ACB$ , каждый каждому; ибо всѣ  
оныя прямые (250 и 259).

№ 2.

2) Если  $AB$  не проходитъ чрезъ центръ  
круга, проводи діаметръ  $AG$  и прямые  $AC$ ,  
 $CB$  и  $BC$ ; найдешь, что  $\text{уг. } CAE = \text{уг. } CAB +$   
 $\text{уг. } ACB = 2 \text{ п. уг. } (31)$ ; почему  $\text{уг. } BAE = \text{уг. } AGB$ ;  
также  $\text{уг. } BAE + \text{уг. } BAF = 2 \text{ п. уг. } (37)$  и  $\text{уг. } ACB + \text{уг. } ACB = 2 \text{ п. уг. } (241)$ ; чего ради  $\text{уг. } BAF = \text{уг. } ACB$ ; слѣдов. и проч.

245. Предложеніе XI. С. Если хорда (AB) круга (ABC) и касательная къ нему (CD), продолженныя, взаимно пресѣкаются въ какой нибудь точкѣ (D): то прямоугольникъ изъ прямой (AD) и отсѣка ея (BD) равенъ будетъ квадрату изъ касательной (CD). Черт. 79.

Проведи прямыя AC и CB; найдешь, что въ треуг-хъ ACD и BCD, уг. DAC = уг. BCD (244) и уг. ADC общій; почему  $AD:CD = CD:BD$  (82 и 205) и прмг.  $\overline{AD} \cdot \overline{BD} = \text{кар. } \overline{CD}$  (195).

246. Предложеніе XII. Въ томъ же кругѣ или въ равныхъ кругахъ равныя дуги стягиваются равными хордами; и обратно, равныя хорды отсѣкаютъ равныя дуги.

1) Пусть въ кругахъ AKD и ELN діам. AB = діам. EF и дуг. AMD = дуг. ENH; говорю, что хрд. AD = хрд. EN. Представимъ, что кругъ AKD положенъ на кругъ ELN такъ, что A падаетъ на E и AB на EF; круги сіи и ихъ дуги AMD и ENH, равныя по положенію, совмѣстятся (31) и точка D падетъ на H; почему хорда AD будетъ равна хордѣ EN (11 или 31). Черт. 80.

2) Пусть въ тѣхъ же кругахъ діам. AB = діам. EF и хрд. AD = хрд. EN; говорю, что дуг. AMD = дуг. ENH. Проведемъ радіусы CD и GH; получимъ два треуг. ACD и EGH, въ коихъ AC = EG, CD = GH (147) и AD = EN по положенію; почему уг. ACD = уг. EGH (47). И такъ если кругъ AKB, какъ въ первомъ случаѣ, положится на кругъ ELN: то CD падетъ на GH, точка D на точку H и дуг. AMD съ дуг. ENH совмѣстятся; чего ради одна другой будетъ равна (31).

247. *Присовок. 1.* Откуда слѣдуетъ, что діаметръ раздѣляетъ окружность круга и самый кругъ на двѣ равныя части; почему въ семъ случаѣ часть круга называется *полукругомъ*, а часть окружности *полуокружностью*.

248. *Присовок. 2.* Отсюда же слѣдуетъ, что окружности круговъ и самые круги, описанные равными радіусами, суть равны между собою.

249. *Присовок. 3.* Отсюда также имѣемъ средство дѣлить дуги круговъ пополамъ.

Черт. 81. Пусть дана будетъ какая нибудь дуга  $ABC$ ; концы ея  $A$  и  $C$  соедини прямою  $AC$ , и изъ середины ея  $D$  поспавъ перпендикуляръ  $DB$ ; сей перпендикуляръ раздѣлишь дугу  $ABC$  пополамъ. Доказательство сего само собою предскажется, когда проведешь хорды  $AB$  и  $BC$  (246).

Черт. 82. 250. *Предложеніе XIII. С.* Въ томъ же кругѣ или въ равныхъ кругахъ ( $AKD$  и  $ELH$ ) равные углы ( $ACD$  и  $EGH$ ) при центрѣ стоятъ на равныхъ дугахъ ( $AMD$  и  $ENH$ ); и обратно: углы при центрѣ, стоящіе на равныхъ дугахъ, суть равны между собою.

1) Проведи хорды  $AD$  и  $EH$ , получишь два треуг.  $ACD$  и  $EGH$ , въ коихъ  $AC = EG$ ,  $CD = GH$ , какъ радіусы равныхъ круговъ, и уг.  $ACD =$  уг.  $EGH$  по положенію; посему  $AD = EH$  (44) и дуг.  $AMD =$  дуг.  $ENH$  (246).

2) Проведи хорды  $AD$  и  $EH$ , получишь два треуг.  $ACD$  и  $EGH$ , въ коихъ  $AC = EG$ ,  $CD = GH$ , какъ радіусы равныхъ круговъ, и  $AD = EH$ , какъ хорды равныхъ дугъ по положенію; чего ради уг.  $ACD =$  уг.  $EGH$  (47).

251. *Присовок. 1.* Откуда явствуешь, что въ шомъ же кругѣ или въ равныхъ кругахъ равные углы при окружности стоятъ на равныхъ дугахъ; и обратно: углы при окружности, стоящіе на равныхъ дугахъ, суть равны между собою (237 и 147).

252. *Присовок. 2.* Откуда также явствуешь, что когда въ равныхъ кругахъ углы при центрахъ равны, то и соответствующіе имъ секторы также равны.

253. *Присовок. 3.* Посему въ кругѣ два діаметра, проведенные одинъ къ другому перпендикулярно, раздѣляютъ какъ кругъ на четыре равные сектора, такъ и окружность его на четыре равныя дуги; чего ради секторъ, у котораго уголъ прямой, называется четвертью круга, а дуга его четвертью окружности.

254. *Предложеніе XIV. Л.* Если уголъ  $(ACB)$  при центрѣ и дуга  $(AB)$ , на коей онъ стоитъ, разѣкнутся какъ нибудь прямою  $(CD)$ , чрезъ вершину его  $(C)$  проходящею; то оный уголъ  $(ACB)$  такъ будетъ относиться къ одному изъ своихъ отсѣковъ  $(ACD)$ , какъ дуга  $(AB)$ , на коей онъ стоитъ, къ соответствующему своему отсѣку  $(AD)$ .

Черт. 82.

Дуга  $AB$  съ своимъ отсѣкомъ  $AD$  или имѣють общую мѣру, или не имѣють.

1) Пусть дуга  $AB$  съ отсѣкомъ  $AD$  имѣють общую мѣрою дугу  $AC$ . Проведи радіусъ  $CC$ ; заключишь, что сколько дуга  $AB$  есть кратна дуги  $AC$ , столько же и уг.  $ACB$  есть кратенъ угла  $ACG$  и сколько дуга  $AC$  есть частна отсѣка  $AD$ , столько же и уг.  $ACG$  есть частенъ угла  $ACD$  (250 и 146). И такъ уг.  $ACG$  угла  $ACD$  и дуга  $AC$  дуги  $AD$  суть

No 1.

равночастныя, а уг.  $ACB$  и дуг.  $AB$  сихъ, равночастныхъ равнократны; слѣдов. уг.  $ACB$ : уг.  $ACD =$  дуг.  $AB$ : дуг.  $AD$  (151).

№ 2.

2) Пусть дуга  $AB$  съ опискомъ  $AD$  обшей мѣры не имѣющъ и пусть описка  $AD$  какая нибудь частная величина  $AG$  и по сей частной взявши приближенные  $AH$  и  $AT$  дуги  $AB$  (150); усмотришь, что уг.  $ACG$  угла  $ACD$  и дуг.  $AG$  дуги  $AD$  суть равночастны; а углы  $ACT$  и  $ACX$ , приближенные угла  $ACB$ , и дуги  $AT$  и  $AH$ , приближенные дуги  $AB$ , сихъ равночастныхъ равнократны (250 и 146); посему уг.  $ACB$ : уг.  $ACD =$  дуг.  $AB$ : дуг.  $AD$  (151).

255. Присовок. Отсюда слѣдуетъ, что сект.  $CAB$ : сект.  $CAD =$  дуг.  $AB$ : дуг.  $AD$  или  $=$  уг.  $ACB$ : уг.  $ACD$  (252 и 159).

Черт. 83.

256. Предложеніе XV. Въ равныхъ кругахъ ( $ABH$  и  $EFG$ ) углы ( $ACB$  и  $ECF$ ) при центрахъ относятся между собою, какъ дуги ( $AB$  и  $EF$ ), на коихъ они стоятъ.

Изъ угловъ  $ACB$  и  $ECF$  въ большемъ уг.  $ACB$  составь при  $AC$  и точкѣ  $C$  уг.  $ACD =$  уг.  $ECF$  (50); будетъ дуг.  $AD =$  дуг.  $EF$  (250); но уг.  $ACB$ : уг.  $ACD =$  дуг.  $AB$ : дуг.  $AD$  (254); чего ради уг.  $ACB$ : уг.  $ECF =$  дуг.  $AB$ : дуг.  $EF$ .

257. Присовок. 1. Отсюда слѣдуетъ, что сект.  $CAB$ : сект.  $CEF =$  дуг.  $AB$ : дуг.  $EF$  или  $=$  уг.  $ACB$ : уг.  $ECF$  (255).

258. Присовок. 2. Уголь  $ACB$  при центрѣ круга такъ относится къ четырёмъ прямымъ угламъ, какъ дуга его  $AB$  къ цѣлой окружности.

Уг.  $ACB$ : п. уг.  $=$  дуг.  $AB$ :  $\frac{1}{4}$  окржн. (255 и 254); почему уг.  $ACB$ :  $\frac{1}{4}$  п. уг.  $=$  дуг.  $AB$ : окржн. (171).

259. *Присовок. 3.* Такое же отношеніе имѣть и самый секторъ круга къ цѣлому кругу (255 и 171).

260. *Присовок. 4.* Дуги круговъ, на коихъ при центрахъ сихъ круговъ стоятъ равные углы, относясь между собою какъ цѣлыя окружности.

Таковыя дуги къ своимъ окружностямъ, какъ углы при центрахъ, кои суть равны между собою, къ четыремъ прямымъ (258); слѣдов. и проч. (159 и 169).

261. *Присовок. 5.* Секторы круговъ, у коихъ углы суть равные, относясь между собою какъ самые круги (259, 159 и 169).

262. *Присовок. 6.* Уголъ при окружности такъ, относясь къ четыремъ прямымъ, какъ половина дуги, на коей онъ стоитъ, къ цѣлой окружности.

Уголъ при центрѣ есть двукратный угла при окружности, стоящаго съ нимъ на той же дугѣ; слѣдов. и проч. (258 и 172).

263. *Присовок. 7.* Если въ кругѣ  $ACBD$  двѣ Черт. 76. хорды  $AB$  и  $CD$  взаимно пресѣкаются въ какой нибудь точкѣ  $E$ : то уг.  $AEC$ , одинъ изъ угловъ между ими содержащихся, къ четыремъ прямымъ, какъ половина двухъ дугъ  $AC$  и  $BD$ , на коихъ стоитъ сей уг.  $AEC$  и противоположный ему уг.  $BED$ , къ цѣлой окружности.

Проведши  $AD$ , найдешь, что уг.  $BAD$ :  $\frac{1}{2}$  п. уг.  $= \frac{1}{2}$  дуги  $BD$ : окржн.  $ACBD$  и уг.  $ADC$ :  $\frac{1}{2}$  п. уг.  $= \frac{1}{2}$  дуг.  $AC$ : окржн.  $ACBD$  (262); чего ради уг.  $ADC +$  уг.  $BAD$ :  $\frac{1}{2}$  п. уг.  $= \frac{1}{2}$  (дуг.  $AC +$  дуг.  $BD$ ): окржн.  $ACBD$  (175); но уг.  $ADC +$  уг.  $BAD =$  уг.  $AEC$  (31); слѣдов. и проч.

264. *Присовок. 8.* Если въ кругу  $ACED$  черт. 76. двѣ хорды  $AC$  и  $BC$  пресекаются въ какой нисть точкѣ  $S$ , лежащей на окружности круга: то уг.  $BCF$ , составляемый  $CF$ , продолженіемъ хорды  $AC$ , и хордою  $BC$ , къ четыремъ прямымъ, какъ половина дуги  $ACB$ , сими хордами отсѣкаемой, къ цѣлой окружности.

Проведши прямую  $AB$ , найдемъ, что уг.  $ECF = \text{уг. } BAC + \text{уг. } ABC$  (81); но уг.  $ABC + \text{уг. } BAC = \frac{1}{2} \text{ дуг. } AC + \frac{1}{2} \text{ дуг. } CB (= \frac{1}{2} \text{ дуг. } ACB)$ : окржн. (262 и 175); слѣдов. и проч.

265. *Присовок. 9.* Если двѣ хорды  $AB$  и черт. 77.  $CD$  круга  $ABC$ , продолженныя, встрѣчаются внѣ оного въ какой нисть точкѣ  $E$ : то уг.  $AEC$ , составляемый ими, къ четыремъ прямымъ, какъ половина избытка внѣшней дуги  $AC$  предъ внутреннею  $BD$ , на концы стоишь онъ, къ цѣлой окружности.

Проведши прямую  $AD$ , найдемъ, что уг.  $AEC = \text{уг. } ADC - \text{уг. } BAD$  (81); но уг.  $ADC - \text{уг. } BAD = \frac{1}{2} (\text{дуг. } AC - \text{дуг. } BD)$ : окржн.  $ABC$  (262 и 175); слѣдов. и проч.

266. *Присовок. 10.* Если прямая  $EF$  касается къ окружности круга  $ACBD$  и отъ точки касанія  $A$  проведена будетъ какая нисть хорда  $AB$ : то уг.  $BAE$ , содержаемый сими прямыми, къ четыремъ прямымъ, какъ половина дуги  $ACB$ , находящейся между тѣми же прямыми, къ цѣлой окружности (244 и 262).

267. *Присовок. 11.* Наконецъ если хорда черт. 79.  $AB$  круга  $ABC$  и касательная къ нему  $CD$ , продолженныя, встрѣчаются внѣ сего круга въ какой нисть точкѣ  $D$ : то уг.  $ADC$ , составляемый сими прямыми, къ четыремъ

прямыхъ, какъ половина избытка внешней дуги  $AC$  предъ внутреннею  $BC$ , на коихъ стоять онъ, къ цѣлой окружности.

Проведши прямую  $BC$ , найдешь, что уг.  $ADC = \text{уг. } ABC - \text{уг. } BCD$  (31); но уг.  $ABC - \text{уг. } BCD : 4$  и уг.  $= \frac{1}{2}$  (дуг.  $AC - \text{дуг. } BC$ ); окрж.  $ABC$  (244, 262 и 175); слѣдов. и проч.



## ПРИБАВЛЕНИЕ къ сей I-й ГЛАВѢ.

О свойствахъ, которыя имѣютъ листво при взаимномъ сопряженіи круговой линіи съ круговою же линіею.

Свойства сіи по сущности своей принадлежатъ совсѣмъ къ особой книгѣ; но какъ они весьма малочисленны, то мы разсудили изложить ихъ шокмо въ прибавленіи къ сей 1-й главѣ.



268. Предложеніе XVI. А. Если отъ взятой единой точки  $(D)$  проведены будутъ къ окружности круга  $(ABC)$  три равныя прямыя  $(DA, DB$  и  $DC)$ : то оная точка  $(D)$  будетъ центръ того круга. Черт. 84.

Проведи прямыя  $AB$  и  $BC$  и чрезъ средныя ихъ  $E$  и  $F$  прямыя  $EDG$  и  $FDH$ ; и треуг.-въ  $ADE$  и  $BDE$ , въ коихъ  $AD = BD$  по положенію,  $AE = BE$  по строенію и  $DE$  общая, найдешь, что уг.  $AED = \text{уг. } BED$  (47) и  $DE$  перпендикулярна къ  $AB$  (34). Также докажется, что  $DF$  перпендикулярна къ  $BC$ .

Но сія перпендикулярныя должны проходитьъ чрезъ центръ круга  $ABC$  (217); чего ради точка  $D$ , въ коей онѣ встрѣчаются и конъ можетъ быть только одна (9), есть центръ сего круга.

Черт. 85. 269. Предложеніе XVII. Круговыя линіи ( $ABC$  и  $DCE$ ), взаимно пресѣкающіяся, общаго центра не имѣютъ и пресѣкаются только въ двухъ точкахъ ( $B$  и  $C$ ).

№ 1. 1) Пусть, если можно, точка  $F$  есть общій центръ круг. линій  $ABC$  и  $DCE$ ; проведи радіусы  $CF$  и  $FCE$ , будетъ  $CF = FCE$  или, все то же,  $FG = FCE$ ; что невозможно; слѣдов. и проч.

№ 2. 2) Пусть, если можно, круг. линія  $ABC$  пресѣкаетъ круг. линію  $DCE$  въ трехъ точкахъ  $B$ ,  $C$  и  $E$ ; съищи центръ  $F$  круга  $ABC$  (216) и проведи радіусы  $FB$ ,  $FC$  и  $FE$ ; они будутъ радіусами и круга  $DCE$  (268); по сему точка  $F$  будетъ общій центръ круговъ  $ABC$  и  $DCE$ ; что, по доказанному предъ симъ, невозможно; слѣдов. и проч.

Черт. 86. 270. Предложеніе XVIII. Круговыя линіи ( $ABC$  и  $ADE$ ), имѣющія общую касательную ( $FAG$ ), общаго центра не имѣютъ; центры ихъ и общая точка касанія находятся на той же линіи; сами онѣ взаимно не болѣе прикасаются, какъ только въ сей общей точкѣ, и не пресѣкаются между собою, хотя бы по одну сторону, или съ разныхъ сторонъ общей касательной находились.

№ 1. 1) Пусть, если можно, точка  $H$  есть общій центръ круг. линій  $ABC$  и  $ADE$ , находящихся по одну сторону касательной  $FAG$  и имѣющихъ неравные радіусы; проведи радіусы  $AH$  и  $HEC$ , будетъ  $AH = HE$

или, все то же,  $HE = HC (= AH)$ , что невозможно; слѣдов. и проч.

Пусть круг. линіи  $ABC$  и  $ADE$  съ рав. No 2. ныхъ сторонъ общей ихъ касательной  $FAC$  находятся; очевидно, что общаго центра имѣть не могутъ.

2) На касательной  $FAC$  изъ  $A$  поставь No 1 и 2. перпендикуляръ  $АН$  (51) и продолжи его въ противоположную сторону, въ случаѣ круговыхъ линій, лежащихъ съ разныхъ сторонъ касательной; заключишь, что центры круговыхъ линій и точка  $A$  въ обоихъ случаяхъ должны находиться на ономъ (250 и 52).

3) Пусть, если можно, круг. линіи  $ABC$  No 1 и 2. и  $ADE$  пересѣкаются въ двухъ точкахъ  $A$  и  $K$ . Проведи радіусы  $IK$  и  $HK$ ; заключишь, что  $KIH$  (No 1) или  $IKH$  (No 2) суть прямыя линіи, ибо центры круг. линій  $ABC$  и  $ADE$ , по доказанному, должны находиться на той же прямой; что невозможно (15). Слѣдов. круг. линіи  $ABC$  и  $ADE$  касаются одна къ другой только въ одной точкѣ  $A$  и между собою не пересѣкаются.

Отсюда происходитъ слѣдующее опредѣленіе:

271. *Опредѣленіе VIII.* Круговыя линіи, имѣющія общую точку, въ которой проведенная касательная къ одной изъ нихъ есть касательная и къ другой, касательными круговыми линіями называются.

272. *Предложеніе XIX. О. XVIII.* Круговыя линіи ( $ABC$  и  $ADE$ ), встрѣгающіяся въ Черт. 87. какой нибудь точкѣ ( $A$ ) и взаимно не пересѣкающіяся, хотя бы выпуклостями своими обращены были въ одну сторону или въ разные стороны, суть взаимно касательныя, то есть, общаго центра не имѣютъ; центры

и та точка вѣстрѣчи ( $A$ ) находится на одной прямой линіи и проведенная въ сей точкѣ касательная ( $FAG$ ) къ одной круговой линіи ( $ABC$ ) будетъ касательная и къ другой ( $ADE$ ).

1) Круг. линіи  $ABC$  и  $ADE$  общаго центра не имѣють; сіе докажется точно такъ, какъ доказанъ первый случай въ предъидущемъ предложеніи.

2) Пусть, если можно, центры круг. линій  $ABC$  и  $ADE$  съ точкою  $A$  не находятся на той же прямой. Черезъ  $H$  и  $I$ , центры оныхъ круг. линій, проведи прямыя  $AH$ ,  $AI$  и  $HI$ , пересѣкающую круг. линіи въ точкахъ  $C$  и  $E$ :

Въ случаѣ круг. линій, обращенныхъ выпуклостями въ одну сторону, усмотришь, что  $AI + HI > AH$  (14); но  $AH = HC = HI + IC$  и  $AI = IE$ ; почему  $HI + IE > HI + IC$  или, все то же,  $IE > IC$ ; что невозможно.

Въ случаѣ же круг. линій, обращенныхъ выпуклостями въ противныя стороны, усмотришь, что  $AH + AI > HI$  (14); но  $AH = HC$ ,  $AI = IE$  и  $HI = HC + CI$ ; почему  $HC + IE > HC + CI$  или, все то же,  $IE > CI$ ; что также невозможно.

И такъ въ обоихъ случаяхъ центры круг. линій  $ABC$  и  $ADE$  и общая точка ихъ вѣстрѣчи будутъ находиться на той же прямой.

3) Наконецъ, если въ точкѣ  $A$  проведенъ касательная  $FAG$  къ кругу  $ABC$ , она будетъ касательною и къ кругу  $ADE$ . По доказанному предъ симъ, центры сихъ круговъ и точка ихъ вѣстрѣчи должны находиться на той же прямой; почему перпендикуляръ, поставленный въ точкѣ  $A$  на ка-

касательной  $FAC$ , проходя чрезъ центръ круга  $ABC$ , пройдетъ и чрезъ центръ круга  $ADE$  (250 и 52); слѣдов. и проч.



## КНИГИ ВТОРОЙ ГЛАВА II.

*О многоугольникахъ въ кругѣ вписанныхъ и около онаго описанныхъ.*

Изъ сикъ многоугольниковъ одни могутъ имѣть и стороны и углы равные, а другіе ни сторонъ, ни угловъ равныхъ; почему, сообразуясь съ сими видами многоугольниковъ, главу сию можно составить изъ двухъ отдѣленій. И такъ

### ГЛАВЫ II-й ОТДѢЛЕНІЕ I-е.



273. *Опредѣленіе I.* Многоугольникъ Черт. 88.  $(ABCDE)$  называется *вписаннымъ* въ кругъ, когда вершины  $(A, B, C, D, E)$  всѣхъ его угловъ суть на окружности сего круга; и обратно: кругъ именуется *описаннымъ* около многоугольника, когда окружность его проходитъ чрезъ вершины всѣхъ угловъ сего многоугольника. No 1.

274. *Опредѣленіе II.* Многоугольникъ  $(ABCDE)$  называется *описаннымъ* около круга, когда всѣ его стороны  $(AB, BC, CD, DE, EA)$  No 2. суть касательныя къ окружности сего круга; и обратно: кругъ именуется *вписаннымъ* въ многоугольникъ, когда окружность его

имѣють касательными всѣ стороны сего многоугольника.

Черт. 88.

№ 1 и 2.

275. *Присовок. 1.* Если описанный въ кругѣ или около него описанный многоугольникъ есть правильный: то перпендикуляръ ( $FG$ ), опущенный изъ центра круга на сторону одного изъ сихъ многоугольниковъ, называется *высотой отъ центра сего многоугольника*.

276. *Присовок. 2.* Если проведенныя прямыя  $FA, FB, FC, FD, FE$  изъ центра круга въ вершины вписаннаго въ немъ или описаннаго около него правильнаго многоугла  $ABCDE$ ; то сей многоугольникъ раздѣлится на равныя треуг.  $FAB, FBC, FCD, FDE$  и  $FEA$  (110). Изъ чего слѣдуетъ, что всякой правильный многоугольникъ въ кругѣ вписанный или около него описанный, равенъ треугольнику, коего основаніе есть периметръ того многоугольника, а высота одинъ изъ перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ центра на его стороны (147).

Черт. 88.

277. *Предложеніе I.* Всякой правильный многоугольникъ ( $ABCDE$ ) можетъ быть описанъ въ кругъ и около него описанъ.

№ 1.

1) Раздѣли углы  $EAB$  и  $ABC$  многоугла  $ABCDE$  пополамъ (53) прямыми  $AF$  и  $BF$ , которыя, явно, встрѣчатся между собою (76); потомъ проводи прямыя  $FC, FD, FE$ ; найдишь, что въ треуг-хъ  $ABF$  и  $BCF$ ,  $AB = BC$  по положенію,  $BF$  общая и уг.  $ABF = \text{уг. } CBF$  по строенію; чего ради  $FA = FC$  и уг.  $FAB = \text{уг. } FCB$  (44); но уг.  $FAB = \frac{1}{2} \text{ уг. } EAB$ ; то будетъ и уг.  $FCB = \frac{1}{2} \text{ уг. } BCD$ , ибо уг.  $EAB = \text{уг. } BCD$  (155); слѣдов.  $FC$  раздѣляетъ уг.  $BCD$  пополамъ. Также докажется, что  $FD, FE$ ,

исполаны, раздѣляющъ углы  $CDE$ ,  $DEA$ , и что какъ сіи углы, такъ и  $FB$ ,  $FD$ ,  $FE$  равны между собою. Слѣдов. вершины  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  всѣхъ угловъ правильнаго многоуг.  $ABCDE$  будутъ находиться на вруг. линіи, радіусомъ  $FA$  описанной. И такъ всякой правильный многоугольникъ можетъ быть вписанъ въ кругъ.

2) Раздѣли, какъ и прежде, углы  $EAB$  No 2. и  $ABC$  многоуг-ка  $ABCDE$  прямыми  $AF$  и  $BF$  пополамъ (53); изъ точки ихъ встрѣчи опусти на стороны многоуг-ка перпендикуляры  $FG$ ,  $FH$ ,  $FI$ ,  $FK$ ,  $FL$ , и проводи  $FC$ ,  $FD$ ,  $FE$ ; найдешь, что въ треугол-хъ  $FEG$  и  $FHN$ , уг.  $FEG = \text{уг. } FHN$  по строенію, уг.  $BGF = \text{уг. } BHF$ , какъ каждый прямой, и  $BF$  общая; посему  $FG = FH$  (71); но, по доказанному въ первомъ случаѣ, уг.  $FCH = \text{уг. } FCI$ ; чего ради  $FH = FI$ . Также докажется, что  $FK = FL = FG$ . Слѣдов. всѣ стороны  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DE$ ,  $EA$  правильнаго многоуг-ка  $ABCDE$  будутъ касательныя къ вруг. линіи, радіусомъ  $FG$  описанной (229). И такъ всякой правильный многоугольникъ можетъ быть описанъ около круга.

Примѣч. Въ семъ предложеніи доказано, что всякой правильный многоугольникъ можетъ быть вписанъ въ кругъ и описанъ около оного; но на самомъ дѣлѣ учинить сіе не всегда можно: ибо мы не имѣемъ средствъ геометрически дѣлать окружность на столько частей, на сколько бы хотѣли. Въ слѣдующихъ предложеніяхъ рассмотримъ тѣ частные случаи, въ коихъ выше предположенное всегда и съ удобностію исполнено быть можетъ.

278. Предложеніе II. Въ данныйъ кругъ Черт. 89. ( $ABC$ ) вписанъ правильный или равносторон- ный треугольникъ.

Круга  $ABC$  сыщи центръ  $D$  (216) и проведи діаметръ  $AE$ , протяни прямыя  $BE$  и  $EC$ , равныя радіусу  $DE$ , и прямыя  $AB$ ,  $AC$  и  $BC$ ; чрезъ что и будешь имѣть требуемый треуг.  $ABC$ .

Проведи прямыя  $DB$  и  $DC$ ; найдешь, что треуг.-ки  $BDE$  и  $CDE$  суть равносторонныя, каждый изъ ихъ угловъ  $BDE$  и  $CDE$  есть третья часть двухъ прямыхъ (34) и уг.  $BDC$  составляетъ двѣ трети оныхъ. Но уг.  $ADB + \text{уг. } BDE = 2 \text{ п. уг.}$  и уг.  $ADC + \text{уг. } CDE = 2 \text{ п. уг.}$  (37); чего ради каждый изъ угловъ  $ADB$  и  $ADC$  есть также двѣ трети двухъ прямыхъ и уг.  $ADB = \text{уг. } ADC = \text{уг. } BDC$ , или все то же, дуг.  $AB = \text{дуг. } AC = \text{дуг. } BEC$  и  $AB = AC = BC$  (250 и 246). И такъ треуг.  $ABC$  есть правильный (135) или равносторонный (42) и слѣдов. требуемый.

279. *Присовок.* Дуга  $BEC$ , по доказанному, есть третья часть окружности  $ABC$  и дуг.  $BE = \text{дуг. } CE$  (246); чего ради  $BE$  и  $CE$ , равныя радіусу  $DE$ , суть стороны теснотугольника, вписаннаго въ кругъ  $ABC$ .

280. *Предложеніе III.* Въ данномъ кругѣ (Черт. 90.  $ef$ )  $(ABCD)$  вписать правильный четырёхугольникъ или квадратъ.

Круга  $ABCD$  сыщи центръ  $E$  (216), проведи діаметры  $AC$  и  $BD$ , одинъ къ другому перпендикулярные (51), и хорды  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DA$ ; чрезъ что и будешь имѣть требуемый четырёхугольникъ. Ибо дуг.  $AB = \text{дуг. } BC = \text{дуг. } CD = \text{дуг. } DA$  (255) и  $AB = BC = CD = DA$  (246); слѣдов. четырёхуг.  $ABCD$  есть правильный (135) или квадратъ (98 и 259) и слѣдов. требуемый.

281. Предложеніе IV. Въ данномъ кругѣ (ACD) вписать правильный пятиугольникъ. Черт. 91.

Круга ACD същи центръ F (216) и проводи диаметръ AC; радіусъ FC въ точкѣ H разсѣи въ крайнемъ и среднемъ отношеніи (188) и отъ G проводи въ кругѣ прямыя GC и GD, равныя GH; потомъ проводи равныя между собою CD, CB и DE, также AB и AE; чрезъ что и будешь имѣть требуемый пятиуг. ABCDE.

Проведши AC, AD и CF, возми CI = FH и проводи GI; найдешь, что треуг-ки CFG и CGI, въ коихъ  $CF:CG = CG:CI$  по строенію и уг. FCG общій, суть подобны (206); чего ради уг. FCG (= уг. FCC) = уг. CIG (201) и CG (= FI) = GI (56). Но уг. CIG = уг. CFG + уг. FGI = 2 уг. CFG (81 и 54), уг. CFG = 2 уг. CAG = уг. CAD (257 и 251) и уг. ACC = уг. ADC = уг. ACD (258 и 251); чего ради уг. ACC = 2 уг. CAD, дуг. ABC = дуг. AED = 2 дуг. CGD и дуг. AB = дуг. AE, ибо дуги BC, CD и DE, стягиваемыя хордами BC, CD и DE, равными по строенію, суть равны между собою (246). И такъ для равенства сихъ дугъ и ихъ хордъ пятиуг. ABCDE есть правильный (155).

282. Присовок. Дуга CC = дуг. CD и CC = CH; чего ради большая часть радіуса, разсѣченнаго въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, есть сторона вписаннаго въ кругѣ правильного десятиугольника.

283. Предложеніе V. Въ данномъ кругѣ (ABC) описать правильный пятинадцатигульникъ. Черт. 92.

Круга ABC същи центръ Q (216) и проводи диаметръ AC; впиши въ семь кругѣ

правильные треуг.  $ABC$  (278) и пятиуг.-къ  $ADEFG$  (281); проводи прямыя  $BE$  и  $CF$  и другія  $АН$ ,  $ИІ$ ,  $DK$ ,  $EL$ ,  $LM$ ,  $CN$ ,  $CO$  и  $OP$  равныя одной изъ первыхъ; потомъ проводи прямыя  $ID$ ,  $KB$ ,  $MF$ ,  $NG$  и  $PA$  и будешь имѣшь требуемый пятнадцатиугольникъ  $АНIDKBELMFCNGOP$ .

По строенію дуг.  $ADB = \text{дуг.} AGC$  и дуг.  $ADE = \text{дуг.} ACF$ ; чего ради, по означеніи первыхъ дугъ отъ послѣднихъ, останется дуг.  $BE = \text{дуг.} CF$ ; также по строенію дуг.  $ADB = \text{дуг.} BSC$  и дуг.  $AD = \text{дуг.} EF$ ; посему, если еи послѣднія дуги означимъ отъ первыхъ, будешь дуг.  $BD = \text{дуг.} BE + \text{дуг.} CF = 2 \text{ дуг.} BE$  и дуг.  $DE = 5 \text{ дуг.} BE$ ; слѣдован. и проч.

Черт. 93. 284. Предложеніе VI. Если въ кругѣ ( $ABD$ ) вписать какой нибудь правильный многоугольникъ ( $ABCDE$ ): то около сего круга описать можно другой, столько же сторонъ имѣющій, правильный многоугольникъ.

Къ сему можно достигнуть двумя способами:

1) Изъ  $L$ , центра круга, проводи въ вершины всѣхъ угловъ вписаннаго многоуг.-ка  $ABCDE$  радіусы  $LA$ ,  $LB$ ,  $LC$ ,  $LD$ ,  $LE$  и чрезъ концы ихъ касательныя  $FK$ ,  $FG$ ,  $GH$ ,  $HI$ ,  $IK$  (231), кои, явно, взаимно встрѣчаются (76) и составляютъ правильный многоуг.  $FGHIK$ , около круга  $ABD$  описанный.

Проведши прямыя  $LF$ ,  $LC$  и  $LK$ , найдешь, что  $AF = BF$  (252), треуг.  $LAF = \text{треуг.} LBF$  (47) и что  $LF$  раздѣляетъ углы  $ALB$  и  $AFB$  пополамъ; также найдешь, что  $LC$  раздѣляетъ пополамъ углы  $BLC$  и  $BGC$ . Но уг.  $BLF = \text{уг.} BLC$  (147); чего ради въ прямыхъ

треуг.  $LBF$  и  $LBC$ ,  $BF = BC$  и уг.  $BFL =$  уг.  $BCL$  (71); также докажется, что  $AF = AK$ . Слѣдов.  $FG = FK$  и уг.  $AFB =$  уг.  $BCK$  (147). Подобнымъ образомъ разсуждая, заключишь, что прочія стороны и углы многоуг-ка  $FGHIK$  равны между собою и что оный есть правильный, около круга  $ABD$  описанный и столько сторонъ имѣющій, сколько оныхъ въ многоуг.  $ABCDE$ .

2) Изъ  $L$ , центра круга, опусти на  $AB$ , Но 2. одну изъ сторонъ вписаннаго многоуг-ка  $ABCDE$ , перпендикуляръ  $LM$  (59), продолжи его до  $N$  и проводи въ сей точкѣ къ окружности касательную  $FG$ ; потомъ продолжи радіусы  $LA$  и  $LB$  до пресѣченія съ нею въ  $F$  и  $G$  и радіусомъ  $LF$  опиши кругъ, линію  $FGI$ , которая, проходя чрезъ  $F$ , пройдетъ и чрезъ  $G$  (66); наконецъ проводи радіусы  $LN$ ,  $LI$ ,  $LK$  и прямыя  $GH$ ,  $HI$ ,  $IK$ ,  $KF$ ; чрезъ что и будешь имѣть правильный многоуг-къ  $FGHIK$ , описанный около круга  $ABD$ . Ибо всѣ сіи прямыя суть хорды, стягивающія равныя дуги (250) и равно описываютъ отъ центра (225); а посему всѣ, какъ и  $FG$ , къ кругу  $ABD$  суть касательныя.

285. *Примовок.* 1. Описанные правильные многоугольники, по тому и другому строенію, имѣють со сторонами вписаннаго стороны равномногія; по нислѣдуетъ, что они сему вписанному суть подобны (202).

286. *Примовок.* 2. А изъ сего само собою представляется средство описывать около круга правильные многоугольники, кои въ кругъ вписывать предъ симъ показанъ способъ (278, 280, 281 и 285), и составлать

или ихъ, или имъ подобные на какой нѣсть данной прямой (203).

Черт. 94. 287. Предложеніе VII. Если въ кругѣ  $FGHIK$  вписанъ или около него описанъ какой нѣсть правильный многоугольникъ  $(ABCDE)$ : то можно вписать или описать другой, вдвое больше сторонъ имѣющій, правильный многоугольникъ.

№ 1. 1) Въ кругѣ  $FGHIK$ , въ коемъ вписанъ многоуг.  $ABCDE$ , дуги  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DE$ ,  $EA$ , равныя между собою (246), раздѣли въ точкахъ  $F$ ,  $G$ ,  $H$ ,  $I$ ,  $K$  пополамъ (249) и проводи хорды  $AF$ ,  $FB$ ,  $BG$ ,  $GC$ ,  $CH$ ,  $HD$ ,  $DI$ ,  $IE$ ,  $EK$ ,  $KA$ ; сіи также будутъ всѣ равны между собою (246); чего ради получишь вписанный въ кругѣ правильный многоугольникъ  $AFBGCHDIEK$ , имѣющій вдвое больше сторонъ, нежели многоуг.  $ABCDE$ .

№ 2. 2) Въ кругѣ  $FGHIK$ , около коего описанъ многоуг.  $ABCDE$ , раздѣли дуги  $FG$ ,  $GH$ ,  $HI$ ,  $IK$ ,  $KF$  въ точкахъ  $L$ ,  $M$ ,  $N$ ,  $O$ ,  $P$  пополамъ; потомъ проводи чрезъ сіи точки касательныя  $QR$ ,  $ST$ ,  $UV$ ,  $XT$ ,  $ZW$ ; онѣ, пресѣкаясь со сторонами многоугольника, составлятъ описанный около круга правильный многоуг.  $QRSTUWXYZ$  вдвое больше сторонъ имѣющій, нежели многоуг.  $ABCDE$ .

Изъ центра круга  $FGHIK$  проведши въ точки касанія и въ вершины угловъ многоугла  $QRSTUWXYZ$  прямыя и соображаясь съ доказательствомъ перваго случая предъидущаго предложенія, заключишь, что всѣ стороны и углы сего многоугольника суть равны между собою и что онъ есть правильный, около круга описанный и вдвое

больше спорая имѣющій, нежели многоуг.  
 $ABCDE$ .

288. Присовок. 1. Отсюда имѣемъ средство вписывать въ кругъ и описывать около оного правильные шестиугольники, осьмиугольники, десятиугольники и тридцатиугольники, или вообще правильные многоугольники, отъ удвоенія числа спораяхъ сихъ многоугольниковъ происходяще.

289. Присовок. 2. Отсюда же имѣемъ средство составлять таковыя многоугольники и имъ подобные на какой нибель данной прямой (208).

290. Предложеніе VIII. Периметры пратильныхъ многоугольниковъ ( $ABCDE$  и  $FGHIK$ ), Черт. 53. описаннаго въ кругъ и подобнаему около круга описаннаго, относятся между собою какъ высоты ихъ отъ центра; самыя же многоугольники суть въ отношеніи квадратовъ изъ сихъ линий.

По вписанному въ кругъ многоугольнику описывается около оного другой двоякимъ образомъ; чего ради предложеніе сіе докажемъ въ томъ и другомъ случаѣ:

1) Многоуг-ки  $ABCDE$  и  $FGHIK$  суть подобны (285); посему треуг-ки  $LAB$  и  $LFG$  No 1. также подобны и  $AB:FG=AL:FL$  (203); но въ прим-мъ треуг.  $LAF$ ,  $LM:AL=AL:FL$  (183); то  $AB:FG=LM:AL$  (159), перм.  $ABCDE$ : перм.  $FGHIK=LM:AL$  (160) и многоуг.  $ABCDE$ : многоуг.  $FGHIK$  ( $=$  кдр.  $\overline{AB}$ : кдр.  $\overline{FG}$ )  $=$  кдр.  $\overline{LM}$ : кдр.  $\overline{LN}$  (211 и 159), ибо  $LN=AL$ .

2) Въ треуг-хъ  $LAM$  и  $LFN$ ,  $AM:FN=$  No 2.  $LM:LN$  (181); почему  $AB:FG=LM:LN$ , перм.  $ABCDE$ : перм.  $FGHIK=LM:LN$  (160) и мно-

No 1.

гоуг.  $ABCDE$ : многоуг.  $FGHIK$  ( $=$  кдр.  $\overline{AB}$ ; кдр.  $\overline{FG}$ )  $=$  кдр.  $\overline{LM}$ : кдр.  $\overline{LN}$  (241 и 159).  
 291. Присовок. 1. Многоуг.  $FGHIK$ : многоуг.  $ABCDE =$  кдр.  $\overline{FG}$ : кдр.  $\overline{AB} =$  кдр.  $\overline{BF}$ : кдр.  $\overline{AM}$  (126 и 160); но кдр.  $\overline{BF} =$  прмг.  $\overline{FM}, \overline{FL}$  и кдр.  $\overline{AM} =$  прмг.  $\overline{FM}, \overline{LM}$  (195); чего ради многоуг.  $FGHIK$ : многоуг.  $ABCDE =$  прмг.  $\overline{FM}, \overline{FL}$ : прмг.  $\overline{FM}, \overline{LM} = LF:LM$  (191 и 159).

292. Присовок. 2. Правильные многоугольники, въ кругахъ вписанные или около ихъ описанные и имѣющіе равномногія стороны, суть подобны (202); посему, какъ въ самомъ предложеніи, докажется, что периметры ихъ и другихъ будутъ относиться между собою какъ радіусы оныхъ круговъ, а самые многоугольники какъ квадраты изъ сихъ линий.



## ГЛАВЫ II-й ОТДѢЛЕНИЕ II-е.



293. Предложеніе IX. Около даннаго треугол. 95. угольника ( $ABC$ ) описать кругъ.

Изъ срединъ сторонъ  $AC$  и  $BC$  треугол.  $ABC$  поставь въ плоскости его перпендикуляры  $DF$  и  $EF$  (51), кои, явно, взаимно встрѣшатся (76); потомъ проведи прямыя  $FA$ ,  $FC$  и  $FE$ , кои все будутъ равны между собою (44); ибо въ прмг-хъ треугол.  $FDA$  и  $FDC$ ,  $DA = DC$  по строенію и  $DF$  общая; а въ прмг-хъ треугол.  $FEC$  и  $FEB$ ,  $CE = BE$

по строенію и  $EF$  общія. И такъ изъ  $F$ , радіусомъ  $EA$ , описанный кругъ  $ACB$  пройденъ, чрезъ точки  $A$ ,  $C$  и  $B$  (25); слѣдов. и проч. (273).

294. Предложеніе X. С. Если изъ угловъ треугольника ( $ABC$ ) одинъ ( $BAC$ ) раздѣлится прямою Черт. 96. ( $AD$ ) пополамъ и сія продолжится до пресѣченія основанія ( $BC$ ) въ какой нисетъ точкѣ ( $D$ ): то будетъ квадратъ изъ ней ( $AD$ ) равенъ прямоугольнику изъ сторонъ ( $AB$  и  $AC$ ) безъ прямоугольника изъ отсѣвовъ ( $BD$  и  $CD$ ) основанія.

Около треуг.  $ABC$  опиши кругъ  $ABC$  (293), продолжи  $AD$  до пресѣченія съ окружностію оного въ точкѣ  $E$  и проводи  $BE$ ; найдешь, что въ треуг-хъ  $ABE$  и  $ADC$  уг.  $BAE =$  уг.  $DAC$  по положенію и уг.  $AEB =$  уг.  $ACD$  (238); почему  $AB:AD = AE:AC$  (82 и 203) и притг.  $AB, AC =$  притг.  $AD, AE$  (195); но притг.  $AB, AE (= \text{кдр. } AD + \text{притг. } AD, DE) = \text{кдр. } AD + \text{притг. } BD, CD$  (242); чего ради притг.  $AB, AC = \text{кдр. } AD + \text{притг. } BD, CD$  и кдр.  $AD = \text{притг. } AB, AC - \text{притг. } BD, CD$ .

295. Предложеніе XI. С. Если около треу- Черт. 97. гольника ( $ABC$ ) опишется кругъ и изъ вершины ( $A$ ) сего треугольника на основаніе его ( $BC$ ) опустится перпендикуляръ ( $AD$ ): то будетъ прямоугольникъ изъ сторонъ ( $AB$  и  $AC$ ) равенъ прямоугольнику изъ оного перпендикуляра ( $AD$ ) и діаметра ( $AE$ ) того круга.

Проведи прямую  $BE$ ; найдешь, что въ треуг-хъ  $ABE$  и  $ADC$  уг.  $ABE =$  уг.  $ADC$ , какъ каждый прямый (239), и уг.  $AEB =$  уг.  $ACD$  (238); почему  $AB:AD = AE:AC$  (82 и 203) и притг.  $AB, AC =$  притг.  $AD, AE$  (195).

296. Предложеніе XII. Около даннаго Черт. 98. четырехугольника ( $ABCD$ ), у коего одни противоположащіе углы ( $ABC$  и  $ADC$ ), вѣдѣтъ

взятыя, равны другамъ таковымъ же угламъ ( $\angle BAD$  и  $\angle BCD$ ), вѣдѣствъ взятымъ, описать кругъ.

Въ четырехъуг.  $ABCD$  проводи діагональ  $AC$  и около треуг.  $ADC$  опиши кругъ линію  $ABCD$  (293); она пройдетъ и чрезъ точку  $B$ . Если нѣтъ: то пусть проходитъ, какъ дуга  $AEC$ . Проведши  $CE$ , найдешь, что уг.  $AEC + \text{уг. } ADC = 2 \text{ п. уг.}$  (241); но въ четырехъуг.  $ABCD$  всѣ углы  $= 4 \text{ п. уг.}$  (138) и уг.  $ABC + \text{уг. } ADC (= \text{уг. } BAD + \text{уг. } BCD \text{ по положенію}) = 2 \text{ п. уг.}$ ; чего ради уг.  $AEC = \text{уг. } ABC$ ; что невозможно (60); слѣдов. и проч.

297. Предложеніе XIII. С. Если въ четырехъугольникъ ( $ABCD$ ), у коего одни противолежащіе углы, вѣдѣствъ взятыя, равны другамъ таковымъ же угламъ, вѣдѣствъ взятымъ, протянутся діагонали ( $AC$  и  $BD$ ): то два прямоугольника изъ противолежащихъ сторонъ равны будутъ прямоугольнику изъ діагоналей.

Около четырехъуг.  $ABCD$  опиши кругъ (296) и при точкѣ  $A$  прямой  $AB$  составь уг.  $BAE = \text{уг. } CAD$  (50); найдешь, что въ треуг.-хъ  $ABE$  и  $ACD$  уг.  $BAE = \text{уг. } CAD$  по строенію и уг.  $ABE = \text{уг. } ACD$  (238); почему  $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BE} : \overline{CD}$  (82 и 203) и прмг.  $\overline{AB}, \overline{CD} = \text{прмг. } \overline{AC}, \overline{BE}$  (195); также въ треуг.-хъ  $AED$  и  $ABC$ , уг.  $EAD = \text{уг. } BAC$  (32; 4) и уг.  $ADE = \text{уг. } ACB$  (238); посему  $\overline{AD} : \overline{AC} = \overline{DE} : \overline{BC}$  (82 и 203) и прмг.  $\overline{AD}, \overline{BC} = \text{прмг. } \overline{AC}, \overline{DE}$  (195). И такъ прмг.  $\overline{AB}, \overline{CD} + \text{прмг. } \overline{AD}, \overline{BC} (= \text{прмг. } \overline{AC}, \overline{BE} + \text{прмг. } \overline{AC}, \overline{DE}) = \text{прмг. } \overline{AC}, \overline{BD}$ .

298. Предложеніе XIV. Въ данномъ треугольникъ ( $ABC$ ) вписать кругъ.

Раздѣли углы  $BAC$  и  $ABC$  прямыми  $AD$  и  $BD$  пополамъ (53), кои, явно, встрѣтятся между собою въ какой нибудь точкѣ  $D$  (76), и изъ сей точки опусти на  $AB, BC$  и  $AC$

перпендикуляры  $DE$ ,  $DF$  и  $DC$  (59), кои всѣ будутъ равны между собою (71); ибо въ прмг-хъ треуг.  $AED$  и  $ACD$  уг.  $DAE = \text{уг.} DAC$  по строенію и  $AD$  общая, а въ прмг-хъ треуг.  $BED$  и  $BFD$ , уг.  $DBE = \text{уг.} DBF$  по строенію и  $BD$  общая. И такъ изъ  $D$  радіусомъ  $DE$  описанный кругъ  $EFG$  пройдетъ чрезъ  $E$ ,  $F$  и  $G$  (25); слѣдов. и проч. (274).

299. *Присовокъ.* Въ треуг.  $ABC$  опусти перпендикуляръ  $CH$  (59); найдемъ, что треуг.  $ACD$ : треуг.  $BCD$ : треуг.  $ADB = AC:BC:AB$  (192) и треуг.  $ACD + \text{треуг.} BCD + \text{треуг.} ADB$ : треуг.  $ADB = AC + BC + AB:AB$  (175); но треуг.  $ABC$ : треуг.  $ADB = CH:DE$ ; чего ради  $AC + BC + AB:AB = CH:DE$  (159). Откуда слѣдуетъ, что треугольникъ равенъ другому треугольнику, у коего основаніе есть периметръ перваго, а высота радіусъ круга, въ ономъ вписаннаго (196).

300. *Предложеніе XV.* Въ данномъ четы- Черт. 101.  
реугольникѣ ( $ABCD$ ), у коего одиѣ противолежащія стороны ( $AB$  и  $CD$ ), вѣдѣтъ взятыя, равны другимъ таковымъ же сторонамъ ( $AD$  и  $BC$ ) вѣдѣтъ взятымъ, вписать кругъ.

Въ четыреуг.  $ABCD$  противолежащія стороны могутъ быть параллельны тѣ и другія, или шокмо одиѣ копорыя нѣсть изъ нихъ, или ни копорыя; посему явно, что три случая здѣсь имѣють мѣсто; но какъ первый никакой трудности въ себѣ не заключаетъ, а другой содержится въ послѣднемъ: то мы рассмотримъ шокмо сей послѣдній.

И такъ углы  $BAD$  и  $ADC$ , находящіеся при основаніи  $AB$ , раздѣлимъ пополамъ (55)

прямыми  $AF$  и  $BF$ , кои, явно, взаимно встрѣ-  
тятся въ какой нибудь точкѣ  $F$  (76); и  
изъ сей точки опустимъ перпендикуляры  $FG$ ,  
 $FH$ ,  $FI$  и  $FK$  (59); подобно, какъ и въ предше-  
ствующемъ предположеніи, найдемъ, что  $FG$ ,  $FH$   
и  $FK$  равны между собою; посему кругъ ли-  
нія, описанная радіусомъ  $FG$ , пройдетъ чрезъ  
 $G$ ,  $H$  и  $K$  (25). Она, говорю, пройдетъ и  
чрезъ  $I$ . Если нѣтъ: то пусть проходитъ,  
какъ дуга  $KLH$ .

Продолжимъ  $FI$  до пресѣченія съ нею  
въ  $L$  и въ сей точкѣ проведемъ къ ней ка-  
сательную  $MN$ , которая пресѣчетъ  $AD$  и  $BC$   
и будетъ пряма  $DC$  (74); усмотримъ, что  
 $MN < DC$  и  $AB + CD > AB + MN$ . Но  $ML =$   
 $MK$ ,  $LN = NH$ ,  $AG = AK$  и  $BG = BH$  (252);  
чего ради  $AB + MN = AM + BN$  и  $AD + BC$   
( $= AB + CD$  по положенію)  $> AM + BN$ ; что  
невозможно. Слѣдов. она, кругъ. линия прой-  
детъ чрезъ  $I$  и содержаемый ею кругъ бу-  
детъ вписанный въ четырехуг.  $ABCD$  (274).



## КНИГИ ВТОРОЙ ГЛАВА III.

*О теоріи предполовъ, составляющей  
третье катало Геометріи.*

Приемлемая въ Основаніяхъ Геометріи круговая линія есть совсѣмъ отлична отъ прямой; посему въ сравненія круга, ею содержаемаго, съ пространствомъ прямолинейнымъ, ни взятаго отношенія круговъ къ таковымъ пространствамъ непосредственно чрезъ правило наложенія и теорію величинъ пропорціональных показать не можно; ибо, сколько бы многоугольниковъ чрезъ удвоеніе числа сторонъ въ кругъ мы ни вписывали и около него ни описывали, никогда его многоугольникомъ не сдѣлаемъ. Для сего и нужно сверхъ правила наложенія и теоріи величинъ пропорціональных ввести въ Геометрію особое начало, которое извѣстно подъ именемъ теоріи предполовъ и которое здѣсь разсмотримъ.



**301. Опредѣленіе.** Если какая нибудь величина отъ какого нибудь одинаковаго, безъ конца продолжаться могущаго, дѣйствія всегда увеличивается или уменьшается и отъ того приближается къ другой непремѣнной величинѣ, никогда ея не достигая, такъ, что избытокъ одной изъ нихъ предъ другою можетъ сдѣлаться меньше всякой по произволѣю данной величины: то сія другая непремѣнная величина называется *предполомъ* первой увеличивающейся или уменьшающейся величины.

**302. Присовокъ.** Откуда явствуется, что въ случаѣ увеличивающейся величины, пре-

дѣль съ величины есть больше ея; а въ случаѣ уменьшающейся, меньше.

*Примѣг.* Въ опредѣленіе предѣла, какъ то явио, входящъ при обстоятельстве: 1) предѣлъ пребываетъ величиною неизмѣнною, когда величина, имѣющая оный, увеличивается или уменьшается; 2) увеличивающаяся или уменьшающаяся величина, приближаясь къ своему предѣлу, никогда его не достигаетъ; и наконецъ 3) избытокъ предѣла предъ увеличивающеюся величиною, или избытокъ уменьшающейся величины предъ предѣломъ, можетъ сдѣлаться меньше всякой по произволению данной величины.

Черт. 102.

Для поясненія сего возьмемъ линію  $AB$  и другую  $AC$  или  $AD$ , большую или меньшую, нежели  $AB$ , какою имеемъ величиною  $BC$  или  $BD$ . Оставя линію  $AC$  или  $AD$  неизмѣнною, спанемъ линію  $AB$  единообразно увеличивая или уменьшая, а именно такъ: приложимъ къ линіи  $AB$  линію  $BX$ , равную половинѣ  $BC$ , или отнимемъ отъ той же  $AB$  линію  $BT$  равную половинѣ  $BD$ : линіи  $AB$  сдѣлаются отъ того линіею  $AX$  или  $AT$ ; приложимъ еще къ линіи  $AX$  линію  $XX'$  равную половинѣ  $BX$  или  $XC$ , или отнимемъ еще отъ  $AT$  линію  $TT'$  равную половинѣ  $BT$  или  $TD$ : линіи  $AB$  сдѣлаются отъ сего линіею  $AX'$  или  $AT'$ . Если дѣйствіе сіе мы продолжимъ далѣе и далѣе: то усмотримъ, 1) что линіи  $AC$  или  $AD$  ни мало не перемѣняются, когда линіи  $AB$ , дѣлаясь линіею  $AX$ ,  $AX'$ , и такъ далѣе, увеличиваются, или, дѣлаясь линіею  $AT$ ,  $AT'$ , и такъ далѣе, уменьшаются; 2) что линіи  $AB$ , такъ же

образомъ увеличивается или уменьшается, никогда до линіи  $AC$  или  $AD$  не достигнеть и равною той или другой не сдѣлается; наконецъ 5) что избытокъ линіи  $AC$  предъ увеличивающеюся линіею  $AB$ , или избытокъ уменьшающеюся линіи  $AB$  предъ линіею  $AD$  можетъ сдѣлаться меньше всякой по произволению данной линіи, ибо избытокъ сей убываетъ на половину своей величины. Изъ чего, согласно съ опредѣленіемъ предѣла, заключаемъ, что линіи  $AC$  или  $AD$  есть предѣлъ увеличивающеюся или уменьшающеюся линіи  $AB$ .

**305. Предложеніе I.** Если одна и также увеличивающаяся или уменьшающаяся величина ( $X$ ) имѣетъ два предѣла ( $A$  и  $B$ ); то оны равны между собою.

1) Пусть величина  $X$  увеличивающаяся и пусть предѣлъ  $A$  больше предѣла  $B$ , если они не равны между собою. Предѣлы  $A$  и  $B$  суть величины непремѣнныя; посему предѣлъ  $A$  долженъ быть больше предѣла  $B$  также непремѣнною какою имѣетъ величиною. Пусть сія величина есть  $D$ ; будетъ  $A = B + D$ . Но увеличивающаяся величина  $X$  никогда предѣла своего  $B$  не достигаетъ и слѣдов. всегда его есть меньше (301 и 302); почему избытокъ предѣла  $A$ , равнаго  $B + D$ , предъ сею величиною  $X$  не можетъ сдѣлаться меньше  $D$  и слѣдов. не можетъ сдѣлаться меньше всякой по произволению данной величины; что, поелику  $A$  есть предѣлъ величины  $X$ , противно положенію. Слѣдов. предѣлы  $A$  и  $B$  не могутъ быть не равны между собою.

2) Пусть величина  $X$  уменьшающаяся и пусть предѣлы  $A$  меньше предѣла  $B$ , если они не равны между собою. Предѣлы  $A$  и  $B$  суть величины непрѣмныя: то предѣлы  $A$  долженъ быть меньше предѣла  $B$  также непрѣмною какою нисестъ величиною. Пусть сія величина естъ  $D$ ; будетъ  $A = B - D$ . Но уменьшающаяся величина  $X$  никогда предѣла своего  $B$  не достигаетъ, и слѣдов. всегда его естъ больше (301 и 302); посему пабышокъ сего величины  $X$  предѣломъ  $A$ , равнымъ  $B - D$ , не можеть сдѣлаться меньше  $D$  и слѣдов. не можеть сдѣлаться меньше всякой по произволению дѣльной величины; что, поелику  $A$  естъ предѣлы величины  $X$ , пропивно положенію: слѣдов. предѣлы  $A$  и  $B$  не могутъ быть не равны между собою.

И такъ, въ обоихъ случаяхъ предѣлы суть равны между собою.

*Прилѣг.* Въ доказательствѣ сіи, какъ то явно, непосредственно входятъ всѣ три обстоятельство, содержащіяся въ опредѣленіи предѣла; и поному, если опустимъ одно которое ибудь изъ сихъ обстоятельствъ отъ предѣловъ  $A$  и  $B$ , ни коимъ образомъ доказать не можно будетъ, что предѣлы  $A$  равенъ предѣлу  $B$ .

304. Предложеніе II. Ежели двѣ увеличивающіяся или уменьшающіяся величины  $X$  и  $Y$  имѣютъ предѣлы  $A$  и  $B$  и всегда такъ относятся между собою, какъ другія двѣ непрѣмныя величины  $M$  и  $N$ : то и предѣлы ихъ будутъ въ томъ же самомъ отношеніи.

1) Пусть величины  $X$  и  $Y$  увеличивающіяся и пусть всегда  $X:Y = M:N$ ; говорю, что въ семь случаев и  $A:B = M:N$ .

Пусть величина  $C$  такова, что  $C:B = M:N$  (185); и пусть величина  $D$  по произволѣю данная. Возми величины  $C$  такую частную  $C$ , чтобы оная  $C$  была меньше  $D$ , и величины  $B$  равночастную  $H$  (102). Въ пропорціи  $C:B = M:N$  величины  $B, M$  и  $N$  суть непрѣмныя, но и величина  $C$  есть непрѣмная (151 или 185); также, поелику  $X:Y = M:N$  по положенію, будетъ  $C:B = X:Y$  (159) и  $C:X = B:Y$  (169) или  $C - X: C = B - Y: B$  (170) и  $C - X: C = B - Y: H$  (172); но  $B$  есть предѣлъ величины  $Y$ ; чего ради избытокъ  $B - Y$  можетъ сдѣлаться меньше всякой по произволѣю данной величины (301). Пусть избытокъ сей  $B - Y$  сдѣлался меньше  $H$  и пусть  $X$  будетъ величина, соотвѣствующая сему состоянію величины  $Y$ ; пропорція  $C - X: C = B - Y: H$ , какъ по явну, также будетъ имѣть мѣсто и потому  $C - X < C$  (184); слѣдов. и паче  $C - X < D$ . И такъ при величинахъ  $C$  и  $X$  въ три обстоятельства, содержащихся въ опредѣленіи предѣла, мѣсто имѣютъ; почему величина  $C$  есть предѣлъ величины  $X$ ; но по положенію и  $A$  есть предѣлъ той же величины  $X$ ; чего ради  $C = A$  (303); и потому, изъ слѣдующихъ пропорцій  $C:B = M:N$ , будетъ напоследокъ  $A:B = M:N$  (166).

2) Пусть величины  $X$  и  $Y$  уменьшающіяся и пусть всегда  $X:Y = M:N$ ; говорю, что и въ семь случаевъ  $A:B = M:N$ .

Пусть величина  $C$  такова, что  $C:B = M:N$  (185); и пусть величина  $D$  по произволению данная. Возьми величины  $C$  такую частную  $G$ , чтобы она  $G$  была меньше  $D$ , и величины  $B$  равночастную  $H$  (102). В пропорции  $C:B = M:N$  величины  $B$ ,  $M$  и  $N$  суть непрѣмныя, то и величина  $C$  есть непрѣмная (151 или 165); также, поелику  $X:T = M:N$  по положению, будетъ  $C:B = X:T$  (159) и  $C:X = B:T$  (169) или  $X - C:C = T - B:B$  (170) и  $X - C:G = T - B:H$  (172); но  $B$  есть предѣлъ величины  $T$ , то избытокъ  $T - B$  можемъ сдѣлаться меньше всякой по произволению данной величины (301). Пусть избытокъ сей сдѣлался меньше  $H$  и пусть  $X$  будетъ величина, соответственная сему состоянію величины  $T$ ; пропорція  $X - C:G = T - B:H$ , какъ то явно, также будетъ имѣть мѣсто и пошому  $X - C < G$  (164); слѣдов. и паче  $X - C < D$ . И такъ при величинахъ  $C$  и  $X$  всѣ при обстоятельства, содержащіяся въ опредѣленіи предѣла, мѣсто имѣютъ; слѣдов. и проч.

## КНИГИ ВТОРОЙ ГЛАВА IV.

О сравненіи круга съ пространствомъ  
прямолинейнымъ и взаимномъ отноше-  
ніи самыхъ круговъ и ихъ окружностей.

**305. Предложеніе I.** А. Избытокъ пра-  
вильныхъ многоугольниковъ, описываемыхъ  
около круга требъ удвоеніе числа сторонъ,  
предъ многоугольниками, въ томъ же кругѣ  
подобно илиъ вписываемыми, можетъ сдѣ-  
латься меньше всякой по произволію дан-  
ной величины.

Пусть  $AB$  и  $EF$  стороны какихъ нисетъ Черт. 103  
подобныхъ вписаннаго въ кругъ  $ABN$  и опи-  
саннаго около него правильныхъ многоу-  
гольниковъ; и пусть еще  $AD$  и  $RS$  стороны  
таковыхъ же многоугольниковъ, вдвое боль-  
ше сторонъ имѣющихъ. Раздѣли уг.  $AOD$  по-  
поламъ (55) прямою  $OI$ , пресекающею  $AD$ ,  
 $RS$  и  $EF$  въ точкахъ  $G$ ,  $H$  и  $I$ , и проводи  
 $GK$  правую  $AB$  (75); найдешь, что преуг.  
 $OHS =$  преуг.  $ODI$  и  $OS = OI$  (71). Означь  
многоугольники, коихъ стороны  $AD$  и  $RS$ ,  
буквами  $P$  и  $Q$ ; будетъ  $Q:P (=OI:OG) = OD:$   
 $OK$  (29: и 179) и  $Q - P:Q = OD - OK (=DK):$   
 $OD$  (170). Но  $DK$  есть половина  $CB$  (100),  
избышка высоты отъ центра многоуголь-  
ника, коего сторона  $EF$ , предъ таковоюжъ  
высотой многоугольника, коего сторона  $AB$ ;  
почему, при каждомъ чрезъ удвоеніе числа  
сторонъ вписыванія въ кругъ и описыванія  
около него подобныхъ правильныхъ много-

угольниковъ, избытокъ высоты отъ центра описываемыхъ многоугольниковъ предъ таковоюжъ высотой подобно имъ вписываемыхъ будетъ уменьшаться половиною величины своей. Изъ сего слѣдуетъ, что избытокъ правильныхъ многоугольниковъ, чрезъ удвоеніе числа сторонъ описываемыхъ около круга, предъ многоугольниками, подобно имъ въ кругѣ вписываемыми, будетъ также каждый разъ уменьшаться половиною величины своей (151 или 163). Но явно, что уменьшающаяся такимъ образомъ величина можетъ сдѣлаться меньше всякой по произволенію данной величины; слѣдов. и проч.

306. *Присовок. 1.* Ошкѹда слѣдуетъ, что избытокъ круга предъ многоугольниками, чрезъ удвоеніе числа сторонъ въ немъ вписываемыми, или избытокъ многоугольниковъ, подобно первымъ около него описываемыхъ, предъ самымъ кругомъ можетъ сдѣлаться и паче меньше всякой по произволенію данной величины.

307. *Присовок. 2.* Всякой правильный многоугольникъ, вписанный въ кругѣ, меньше треугольника, коего основаніе окружность, а высота радіусъ сего круга; а всякой правильный многоугольникъ, описанный около круга, больше сего самаго треугольника (110 и 276); посему избытокъ сего треугольника предъ многоугольниками, чрезъ удвоеніе числа сторонъ, въ томъ же кругѣ вписываемыми, или избытокъ многоугольниковъ, подобно имъ около него описываемыхъ, предъ симъ самымъ треуголь-

никомъ, можетъ сдѣлаться также меньше всякой по произволению данной величины.

308. *Предложеніе II.* Кругъ есть предѣлъ *правильныхъ многоугольниковъ, описываемыхъ въ него, или описываемыхъ около него чрезъ удвоеніе числа сторонъ ихъ.*

Многоугольники, вписываемые въ кругъ или описываемые около него чрезъ удвоеніе числа сторонъ, увеличивались или уменьшались, до него никогда не достигаютъ (31) и оный пребываетъ неизмѣннымъ; также избытокъ круга предъ сими увеличивающимися многоугольниками, или избытокъ уменьшающихся многоугольниковъ предъ кругомъ, можетъ сдѣлаться меньше всякой по произволению данной величины (306); чего ради кругъ есть предѣлъ сихъ многоугольниковъ (301).

309. *Примовок.* Точно также докажется, что и треугольникъ, коего основаніе окружность круга, а высота радіусъ его, есть предѣлъ тѣхъ же самыхъ многоугольниковъ (307 и 301).

310. *Предложеніе III.* Всякой кругъ ( $ABD$ ) равенъ треугольнику ( $PQR$ ), коего основаніе ( $PQ$ ) есть окружность круга, а высота ( $PR$ ) радіусъ его. Черт. 105

Пусть въ кругъ  $ABD$  вписанъ, какой ни есть правильный многоуг.  $ABCDE$ ; вышии чрезъ удвоеніе числа сторонъ другой (287), и такъ далѣе; кругъ  $ABD$  и треуг.  $PQR$  будутъ предѣлы сихъ многоугольниковъ (308 и 309) и слѣдов. равны между собою (303).

311. *Примовок.* 1. Ошелога слѣдуетъ, что секторъ  $СAB$  круга  $ABD$  равенъ треуг.  $ЕFC$ , Черт. 104.

кого основаніе  $EF$  есть дуга секшора и вы-  
сота  $EG$  радіусъ круга.

Секш.  $CAB$ : кругу  $ABD =$  дуг.  $AB$ : окржн.  
 $ABD$  (259) и треуг.  $EFC$ : треуг.  $EMG = EF$ ;  
 $EM$  (192), гдѣ  $EM =$  окржн.  $ABD$ ; слѣдов.  
секш.  $CAB =$  треуг.  $EFG$  (166).

Черт. 104.

312. Присовоѣ. 2. Треуг.  $ABC$ , имѣющій  
 $AC$  основаніемъ, и перпендикуляръ  $BH$ , изъ  
 $B$  опущенный на радіусъ  $AC$ , продолженный,  
если нужно, высотой, равенъ треугольни-  
ку, имѣющему  $BH$  основаніемъ и  $AC$  вы-  
сотю (196); почему взявъ  $FI = BH$  и провед-  
ши  $CI$ , получишь треуг.  $FIC =$  треуг.  $ABC$ ,  
и слѣдов. треуг.  $EIG =$  сегм.  $AKB$ , то есть,  
меньшій сегм.  $AKB$  круга  $ABD$  равенъ треуг.  
 $EIG$ , коего основаніе  $EI$  есть избытокъ дуги  
 $AKB$  предъ половиною  $BH$  хорды  $BL$ , стяги-  
вающей дугу  $BAL$ , двукратную сей дуги  $AKB$ ,  
а высота  $EG$  радіусъ  $AC$  того круга. Но тре-  
уг.  $EMG =$  круг.  $ABD$  (310); чего ради боль-  
шій сегм.  $ADB$  сего круга равенъ треуг.  $IMC$ ,  
коего основаніе  $IM$  есть совокупная величина  
дуг.  $ADB$  съ тою половиною  $BH$  хорды  $BL$ ,  
стягивающей дугу  $BAL$ , двукратную дуги  
 $AKB$  меньшаго сегм.  $AKB$ , а высота  $EG$  ра-  
діусъ  $AC$  того круга.

Черт. 105.

313. Предложеніе IV. Круги ( $ABD$  и  $FGI$ )  
суть въ отношеніи квадратовъ изъ ихъ раді-  
усовъ ( $LM$  и  $NO$ ), окружности же оныхъ въ  
отношеніи сихъ самихъ радіусовъ.

1) Пусть въ кругахъ  $ABD$  и  $FGI$  впи-  
саны правильные, равномногія стороны имѣ-  
ющіе, многоугольники  $ABCDE$  и  $FGHIK$ ; по-  
томъ впиши другіе, вдвое больше сторонъ  
имѣющіе (287), и такъ далѣе. Сіи многоу-  
гольники суть въ отношеніи квадратовъ

изъ радіусовъ оныхъ круговъ (292); чего ради и предѣлы ихъ будутъ въ томъ же отношеніи (504), то есть, круг.  $ABD$  : круг.  $FGI = \text{вдр. } \overline{LM} : \text{вдр. } \overline{NO}$ .

2) Составъ прѣм-ные треуг.  $PQR$  и  $STU$ , у коихъ основанія суть окружности круговъ  $ABD$  и  $FGI$ , а высоты ихъ радіусы  $LM$  и  $NO$  (112); по первой части сего предложенія будетъ треуг.  $PQR$  : треуг.  $STU = \text{вдр. } \overline{PR} : \text{вдр. } \overline{SU}$ , ибо треуг.  $PQR = \text{круг. } ABD$  и треуг.  $STU = \text{круг. } FGI$  (510), а  $PR = LM$  и  $SU = NO$  по строенію. Говорю, что сіи треуг-ки суть подобны. Если не подобны, составъ уг.  $SUV = \text{уг. } PRQ$  (50); будетъ треуг.  $PQR$  : треуг.  $SUV = \text{вдр. } \overline{PR} : \text{вдр. } \overline{SU}$  (205 и 210) и треуг.  $SUV = \text{треуг. } STU$  (166); что невозможно. И такъ треуг-ки  $PQR$  и  $STU$  суть подобны и  $PQ : ST = PR : SU$  (201), то есть, окржн.  $ABD$  : окржн.  $FGI = LM : NO$ .

514. Присовок. 1. Отсюда имѣемъ средство находить кругъ, равный многимъ кругамъ и избытокъ большаго предъ меньшимъ (212 и 215).

515. Присовок. 2. Пространство, содержащееся между окружностями двухъ круговъ, изъ коихъ одинъ внутри другаго, и называемое *кольцели*, равно кругу, коего радіусъ есть средний пропорціональный между совокупною величиною радіусовъ оныхъ двухъ круговъ и избыткомъ одного изъ сихъ радіусовъ предъ другимъ.

Пусть круги  $ABC$  и  $DEF$  имѣютъ об- Черт. 106.  
щій центръ  $C$ ; проводи чрезъ оный прямую  $ADGFC$ , изъ  $D$  поспавь перпендикуляръ  $DB$ , и проводи радіусъ  $BC$ ; найдешь, что кругъ,

описанный  $BD$ , равенъ круг.  $ABC$  — круг.  $DEF$  (314); но разность сихъ круговъ равна кольцу  $ABCD$  и  $BD$  есть ередняя пропорціональная между  $DC = DG + GC$  и  $AD = AG - DG$  (183); слѣдов. и проч.

Черт. 107. 316. *Присовок. 3.* Секторы  $CAB$  и  $FDE$  круговъ  $ABC$  и  $DEF$ , имѣющіе углы при центрахъ  $C$  и  $F$  равные, суть въ отношеніи квадратовъ изъ радіусовъ  $AC$  и  $DF$  (259, 159 и 313); дуги же ихъ въ отношеніи сихъ самыхъ радіусовъ (258, 159 и 313).

317. *Присовок. 4.* Отсюда слѣдуетъ, что сегменты  $AIB$  и  $DKE$  или  $AGB$  и  $DHE$  круговъ  $ABC$  и  $DEF$ , вмѣщающіе углы равные, имѣють дуги  $AIB$  и  $DKE$  или  $AGB$  и  $DHE$  пропорціональныя ихъ основаніямъ  $AB$  и  $DE$ , или ихъ высотамъ  $LI$  и  $МК$  или  $LG$  и  $MH$  и сами суть въ отношеніи квадратовъ изъ сихъ линий.

Въ самомъ дѣлѣ пусть уг.  $AIB = \text{уг. } DKE$ ; будетъ уг.  $AGB = \text{уг. } DHE$  (241), уг.  $ACB = \text{уг. } DFE$  (147) и въ равнобедренныхъ треуг.  $ABC$  и  $DEF$ ,  $CA:FD = AB:DE$  (83 и 203); чего ради дуг.  $AIB: \text{дуг. } DKE (= CA:FD) = AB:DE$  (260, 313 и 159), сект.  $CAB: \text{сект. } FDE (= \text{кдр. } \overline{CA}: \text{кдр. } \overline{FD}) = \text{кдр. } \overline{AB}: \text{кдр. } \overline{DE}$  (316 и 159), треуг.  $ABC: \text{треуг. } DEF = \text{кдр. } \overline{AB}: \text{кдр. } \overline{DE}$  (210) и сект.  $CAB$  — треуг.  $ABC: \text{сект. } FDE$  — треуг.  $DEF = \text{кдр. } \overline{AB}: \text{кдр. } \overline{DE}$ , то есть, сегм.  $AIB: \text{сегм. } DKE = \text{кдр. } \overline{AB}: \text{кдр. } \overline{DE}$  (178). Также докажется, что окржн.  $ABC$  — дуг.  $AIB: \text{окржн. } DEF$  — дуг.  $DKE = AB:DE$  и круг.  $ABC$  — сегм.  $AIB: \text{круг. } DEF$  — сегм.  $DKE = \text{кдр. } \overline{AB}: \text{кдр. } \overline{DE}$  (178), то есть, дуг.

$ACB$ : дуг.  $DHE = AB:DE$  и сегм.  $ACB$ : сегм.  $DHE = \text{вдр. } \overline{AB} : \text{вдр. } \overline{DE}$ .

Чтобы вывести подобныя пропорціи въ разсужденіи высотъ  $LI$  и  $MK$  сегментовъ  $AIB$  и  $DKE$ , или высотъ  $LG$  и  $MH$  сегментовъ  $ACB$  и  $DHE$ , стоить только замѣтить, что въ прѣм-хъ треуг.  $ALC$  и  $DMF$ , уг.  $CAL = \text{уг. } FDM$ , по доказанному выше, и  $CA:CL = FD:FM$  (203); чего ради  $CA \mp CL:FD \mp FM = CA:FD$  (170 и 169) и  $LI$  или  $LG:MK$  или  $MH = AB:DE$  (159); слѣдов. и проч.



## КНИГА ТРЕТІЯ.

*О свойствахъ, которыя имѣютъ мѣсто  
при взаимномъ сопряженіи плоскостей  
съ прямыми линіями и плоскостями.*



Вопервыхъ при сопряженіи плоскости съ прямыми линіями, видъ ея протянутому, ничего болѣе разсужденію нашему не представляется, какъ одно такое положеніе сихъ линій въ разсужденіи той плоскости; откуда происходятъ *перпендикулярныя, параллельныя и наклонныя линіи къ плоскости*. Потомъ при сопряженіи плоскостей, и вопервыхъ двухъ, также не болѣе представляется, какъ взаимное одной изъ нихъ въ разсужденіи другой положеніе; откуда происходятъ другъ къ другу *перпендикулярныя, параллельныя и наклонныя плоскости*. При сопряженіи же трехъ плоскостей представляются разсужденію нашему слѣдующіе случаи: двѣ изъ сихъ плоскостей, сопряженныхъ третью, или встрѣчаются по которую нибудь сторону или не встрѣчаются. Положимъ, что тѣ двѣ плоскости, сопряженные третью, встрѣчаются. Взаимное сѣченіе встрѣчающихся плоскостей есть прямая линія (19); поему и здѣсь представляются два случая: сія прямая линія также или встрѣчается съ тою третьей плоскостію по которую нибудь сторону, или не встрѣчается. Въ первомъ случаѣ она прямая встрѣчается и съ тѣми прямыми, кои суть взаимныя сѣченія двухъ

плоскостей, сопряженныхъ шрепъею; а чрезъ сѣе составится неопредѣленное пространство, которое *толстыйиъ угломъ* называется. Въ другомъ случаѣ прямая линія, составляющая взаимное сѣченіе двухъ плоскостей и не встрѣчающаяся съ шрепъею плоскостію ни по которую сторону, такъ какъ параллельная сей плоскости, не встрѣчается также и съ сѣченіями ея съ тѣми двумя плоскостями и есть имъ параллельна. Отсюда происходитъ, какъ и въ первомъ случаѣ, также неопредѣленное пространство, которое, для отличія отъ перваго, назвать можно *призматическимъ*. Положимъ теперь, что двѣ плоскости, сопряженныя шрепъею, не встрѣчаются ни по которую сторону, но есть, суть параллельны между собою; въ семъ случаѣ мы ничего болѣе не приобретаемъ, какъ одно токмо понятіе о содержащемся между ими и болѣе, нежели прежнія, неопредѣленномъ пространствѣ. Изъ сего заключаемъ, что шрепъе взаимно сопряженными плоскостями опредѣленнаго пространства заключить не можно. И шакъ если три плоскости, содержащія толстый уголъ, пресѣчемъ четвертою, заключится опредѣленное пространство, которое *пирамидою* называется; когда же три плоскости, содержащія призматическое пространство, пресѣчемъ двумя плоскостями или параллельными или непараллельными между собою: то также заключится опредѣленное пространство, которое *призмою* именуется *просто* или *якоу* *усѣбенною*.

Послѣ сего не трудно составить понятіе о толстыхъ углахъ, содержащихся че-

шья, пншю, и шакъ далѣ плоскими углами, и о чешыреспоронныхъ, пншнспоронныхъ, и шакъ далѣ, пнрамндахъ и пнзмахъ, или вооще какъ о толспыхъ углахъ, сколькои ннеспъ плоскими содержнмыхъ, шакъ и о двухъ родахъ шѣлъ, копорыя вооще многоспоронными пнрамндами и пнзмами нменуются.

Но сн углы и сн два рода шѣлъ пронзведены ошъ того случая, въ копоромъ двѣ плоскостн, сопряженныя прешью, взаимно вспрѣчаются по копорую ннеспъ сторону. Тесерь посмошрнмъ, какія шѣла пронзойшн могутъ ошъ другаго случая, въ копоромъ шѣ двѣ плоскостн, сопряженныя прешью, нн по копорую сторону невспрѣчаются, то естъ, сушъ параллельны между собою. Чншобы заклочннъ помощю нхъ опрѣдѣленое пространство, надобно во первыхъ по крайней мѣрѣ еще двѣ плоскостн, взаимно прешѣкающнся, копорыя, сопрягая параллельныя, вмѣстѣ прешѣкали бы и прешью съ ннми сопряженную плоскость. Чрезъ рассужденіе подобное тому, посредствомъ коего составнлн понятіе о толспомъ углѣ и пнзматическомъ пространствѣ, мы достигнемъ или къ усѣченной прехспоронной пнрамндѣ, или къ обыкновенной прехспоронной пнзмѣ, и слѣдов. къ шѣламъ уже нзвѣстнымъ нзъ перваго случая. Равнымъ образомъ если двѣ параллельныя плоскостн, сопряженныя прешью, сопряжемъ еще прешя, чешырма, и шакъ далѣ плоскостями: то достигнемъ или къ многоспороннымъ усѣченнымъ пнрамндамъ, или къ многоспороннымъ пнзмамъ; и слѣдов.

къ шѣламъ также извѣстнымъ изъ перваго случая.

Изъ сихъ послѣднихъ случаевъ наипаче шонъ достопримѣчателенъ, въ которомъ двѣ параллельныя плоскости, сопряженныя прешью, сопрягаются еще тремя такъ, что одна изъ нихъ параллельна сей прешней плоскости, а другія двѣ между собою, то есть такъ, что каждыя двѣ взаимно противоположащія плоскости суть параллельны между собою. Пространство, таковыми шестью плоскостями содержаемое, есть не иное что, какъ чешыресторонняя призма; но для особенноти случая *параллелепипеда* называется.

Далѣе сего въ сопряженіи плоскостей систематическимъ порядкомъ едва ли поступить можно; и по сіе время другихъ шѣлъ, содержащихся сопряженными плоскостями, намъ еще не извѣстно; развѣ къ онымъ причислить пять, такъ называемыхъ, правильныхъ шѣлъ, о коихъ ниже сего предложено будетъ. Впрочемъ нѣтъ сомнѣнія, что оныхъ можетъ быть безчисленное множество; по сему всякому шѣлу, содержащему сопряженными плоскостями, мы дадимъ общее наименованіе многогранника.

И такъ соображаясь съ порядкомъ, въ какомъ выведенные предъ симъ предметъ намъ представилась, и съ тѣми разсужденіями, кои при раздѣленіи книги первой на главы мы сдѣлали, сію прешью книгу можемъ составить изъ слѣдующихъ главъ:

I. О линіяхъ и плоскостяхъ перпендикулярныхъ, параллельныхъ и наклонныхъ:

первыхъ относительно къ плоскости, а другихъ взаимно.

- II. О толстыхъ углахъ.
- III. О пирамидахъ и призмахъ.
- IV. О параллелепипедахъ.
- V. О многогранникахъ вообще.
- VI. О приложеніи теоріи величинъ пропорціональныхъ къ тѣламъ.
- VII. О подобіи многогранниковъ.



## КНИГИ ТРЕТЬЕЙ ГЛАВА I.

О линіяхъ и плоскостяхъ перпендикулярныхъ, параллельныхъ и наклонныхъ: первыхъ относительно къ плоскости, а другихъ взаимно.



Зѣв. Предложеніе I. Если къ двумъ Черт. 103. прямымъ ( $DE$  и  $DF$ ), взаимно пересѣкающимся, при точкѣ ихъ пересѣченія ( $D$ ) будетъ перпендикулярна третья прямая ( $CD$ ): то она будетъ перпендикулярна и ко всякой прямой ( $DG$ ), въ плоскости ( $AB$ ) тѣхъ двухъ прямыхъ чрезъ точку ихъ пересѣченія протянутой.

Взявъ на  $DE$  и  $DF$  какія нибудь точки  $E$  и  $F$ , проводи прямую  $EF$  и продолжи, если нужно,  $DC$  до пересѣченія съ нею въ точкѣ  $G$ ; продолжи также  $CD$  и, взявъ  $DN = CD$ , проводи прямыя  $CE$ ,  $CG$ ,  $CF$ ,  $EN$ ,  $CN$  и  $FN$ ; найдешь, что въ треугольн.  $CEF$  и

$HEF$ ,  $CE = EH$ ,  $CF = FH$  (44 или 66) и  $EF$  общая; чего ради уг.  $CEF =$  уг.  $HEF$  (47). Равнымъ образомъ изъ треуг-въ  $CEG$  и  $HEG$ , въ коихъ  $CE = EH$ ,  $EG$  общая и уг.  $CEG =$  уг.  $HEG$ , получимъ  $CG = HG$  (44). Наконецъ изъ треуг-въ  $CGD$  и  $HGD$ , въ коихъ  $CD = DH$  по строенію,  $CG = GH$  по доказанному и  $DG$  общая, найдемъ, что уг.  $GDC =$  уг.  $GDH$  (47) и  $DG$  къ  $CH$  или, все то же,  $CD$  въ  $DG$  есть перпендикулярна (54).

Отсюда происходитъ слѣдующее опредѣленіе:

319. *Опредѣленіе I.* Если прямая ( $CD$ ), встрѣчающаяся съ плоскостію ( $AB$ ) въ какой нибудь точкѣ ( $D$ ), есть перпендикулярна ко всѣмъ прямымъ ( $DF$ ,  $DE$ ,  $DG$ ), проходящимъ чрезъ точку встрѣчи: то сія прямая называется *перпендикулярною* къ оной плоскости ( $AB$ ), или просто *перпендикуляромъ*.

320. *Присовок. 1.* И такъ, когда прямая линія перпендикулярна къ другимъ двумъ прямымъ, на плоскости проланушымъ, при точкѣ ихъ взаимнаго пресѣченія: то она будетъ перпендикулярна и къ самой плоскости (319).

321. *Присовок. 2.* Изъ чего явствуетъ, какъ чрезъ данную точку прямой линіи провести плоскость, къ которой бы сія прямая была перпендикулярна: ибо чрезъ данную точку можно провести въ двухъ разныхъ плоскостяхъ къ оной прямой два перпендикуляра (51); проланушая чрезъ нихъ плоскость и будетъ требуемая (320.)

Черт. 109.

322. Предложеніе II. С. На плоскости (BC) изъ данной на ней точки (A) поставить перпендикуляръ.

Въ плоскости BC чрезъ A проводи прямую DE и къ ней перпендикуляръ AF (51); потомъ въ другой плоскости, проходящей чрезъ AF, поставь на AF перпендикуляръ AG; если линия AG будетъ перпендикулярна и къ DE, то требуемое сдѣлано (520). Если же AG будетъ не перпендикулярна къ DE, то въ плоскости прямыхъ DE и AG поставь на DE перпендикуляръ AH (51); сей и будетъ требуемый.

Ибо AF, перпендикулярная къ DE и AG по строенію, есть перпендикулярна къ плоскости чрезъ нихъ проходящей (520); чего ради перпендикулярна и къ AH (518). И такъ AH есть перпендикулярна къ DE и AF; и слѣдов. къ плоскости BC, въ коей онъ находится (520.)

323. Присовок. Ошбуда явствуетъ, что на плоскости изъ той же точки болѣе одного перпендикуляра поставить не можно (52).

Черт. 110.

324. Предложеніе III. Если двѣ прямыя (AB и CD) перпендикулярны къ той же плоскости (EF); то оныя параллельны между собою.

Точки B и D, въ коихъ съ плоскостію EF встрѣчаются AB и CD, соединивъ прямою BD, поставь на ней въ той же плоскости изъ точки D перпендикуляръ DG (51); возми  $DG = AB$  и проводи прямыя BG, AG и AD; найдешь, что въ треугольн. ABD и BDC,  $AB = DG$  по строенію, BD общая и уг.  $ABD = \text{уг. } BDG$ , какъ каждый прямой; посе-

му  $AD = BG$  (44); также изъ треугольн.  $ADC$  и  $ABG$ , въ коихъ  $DG = AB$  по строению,  $AD = BG$  по доказанному и  $AG$  общая, получимъ уг.  $ADC = \text{уг. } ABG$  (47), который есть прямой. И такъ  $DG$  есть перпендикулярна къ  $BD$ ,  $AD$  и  $CD$ ; чего ради сіи прямые и  $AB$  суть въ той же плоскости (316) и слѣдов.  $CD$  прл-на  $AB$  (74).

Впрочемъ, если бы кто сказалъ, что  $CD$  съ  $AB$  не въ одной плоскости: то чрезъ  $AB$  и  $BD$  проведемъ плоскость, которая съ плоскостію, проходящею чрезъ  $CD$  и  $DG$ , встрѣтитсѣ въ какой-нибудь прямой  $DH$  (19); прямая  $DG$ , бывъ перпендикулярна къ плоскости  $ABDH$ , будетъ перпендикулярна и къ  $DH$ ; чего ради въ плоскости  $CDG$  на прямой  $DG$  изъ одной точки  $D$  послѣдуютъ два перпендикуляра  $DC$  и  $DH$ ; что невозможно (58).

325. Предложеніе IV. О. III. Если изъ двухъ параллельныхъ прямыхъ ( $AB$  и  $CD$ ), встрѣгающихся съ плоскостію ( $EF$ ), одна ( $AB$ ) есть къ ней перпендикулярна: то и другая ( $CD$ ) также перпендикулярна къ оной.

Чрезъ строеніе и разсужденіе, кои учинены въ предыдущемъ предложеніи, достигнемъ къ заключенію, что  $DG$  есть перпендикулярна къ  $BD$  и  $AD$ ; почему она перпендикулярна и къ  $CD$ , такъ какъ сія прямая съ  $AB$  (75), и потому съ  $BD$  и  $AD$  находится въ той же плоскости. И такъ  $CD$ , прл-ная  $AB$  по положенію, есть перпендикулярна къ  $BD$  и  $DG$ ; слѣдов. и къ плоскости  $EF$  (320).

Черт. III.

326. Предложеніе V. С. Изъ точки ( $A$ ), внѣ плоскости ( $BC$ ) находящейся, опустить на оную перпендикуляръ.

Въ плоскости  $BC$  проведи какъ ни есть прямую  $DE$  и изъ  $A$  опусти на нее перпендикуляръ  $AF$  (59); потомъ въ той же плоскости  $BC$  поставь на  $DE$  перпендикуляръ  $FC$  (51); если  $AF$  перпендикулярна къ  $FC$ , то требуемое будетъ сдѣлано (320). Если же  $AF$  не перпендикулярна къ  $FC$ , то въ плоскости  $AFC$  опусти на  $FC$  перпендикуляръ  $AG$  (59), который и будетъ требуемый.

Черезъ точку  $C$  проведи  $HCI$  параллельную  $DE$  (75); усмотришь, что  $DE$ , перпендикулярная къ  $AF$  и  $FC$  по строенію, есть перпендикулярна и къ ихъ плоскости (320); чего ради прямая  $HCI$  также перпендикулярна къ сей плоскости (325) и уг.  $AGH$  есть прямой; но уг.  $AGF$  есть прямой же по строенію; слѣдов.  $AG$  къ плоскости  $BC$  перпендикулярна (320).

327. Присовок. 1. Откуда явствуется, что изъ точки внѣ плоскости находящейся, на сію послѣднюю болѣе одного перпендикуляра опустить не можно (61).

328. Присовок. 2. Откуда же явствуется, что если изъ точки  $A$ , внѣ плоскости  $BC$  взятой, опустился на оную перпендикуляръ  $AG$ ; а изъ точки  $C$  опустился перпендикуляръ  $CF$  на прямую  $DE$ , какъ ни есть въ той же плоскости протянутую: то прямая  $AF$  къ сей прямой  $DE$  будетъ перпендикулярна.

Черезъ  $C$  проведи  $HCI$ , параллельную  $DE$  (75); усмотришь, что уг.  $HCF$  есть прямой

(77) и уг.  $DFG = \pi$ , уг. по строению; чего ради  $HGI$ , перпендикулярная къ  $FG$  и  $AC$ , есть перпендикулярна и къ ихъ плоскости (320); посему  $DE$ , параллельная  $HGI$ , также перпендикулярна къ сей плоскости (325); слѣдов. и  $AF$  есть перпендикулярна къ  $DE$ .

329. Предложеніе VI. С. Если прямой (EF) будутъ двѣ другія прямыя ( $AB$  и  $CD$ ), не находящіяся съ нею въ одной плоскости, параллельны; то сіи и между собою параллельны. Черт. 112.

На  $EF$  изъ какой нисешь точки  $G$ , къ плоскостяхъ прямыхъ  $EF$  и  $AB$ ,  $EF$  и  $CD$  поставь перпендикуляры  $GH$  и  $GI$  (51); прямая  $EF$ , перпендикулярная къ  $GH$  и  $GI$ , будетъ перпендикулярна и къ ихъ плоскости (320); почему каждая изъ  $AB$  и  $CD$ , параллельныхъ  $EF$ , будетъ къ сей плоскости также перпендикулярна (325); слѣдов.  $AB$  и  $CD$  суть между собою параллельны (324).

330. Предложеніе VII. С. Если двѣ встрѣгающіяся прямыя ( $AB$  и  $BC$ ) будутъ параллельны другилѣ двумлѣ по ту же сторону встрѣгающимися прямилѣ ( $DE$  и  $EF$ ), кои съ первыми суть не въ одной плоскости; то содержащія или углы ( $ABC$  и  $DEF$ ) будутъ равны между собою. Черт. 113.

Возми  $AB = DE$ ,  $BC = EF$  и проводи прямыя  $AC$ ,  $DF$ ,  $AD$ ,  $BE$  и  $CF$ ; усмотрѣвъ, что  $AD = BE = CF$  (104 и 94) и  $AD$  параллельна  $CF$  (329); чего ради  $AC = DF$  (104 и 94). И такъ шреуг.  $ABC =$  шреуг.  $DEF$  (47); слѣдов. и уг.  $ABC =$  уг.  $DEF$ .

331. Предложеніе VIII. Если прямая ( $AB$ ), находящаяся въ плоскости ( $CD$ ), будетъ параллельна другой прямой ( $EF$ ), на- Черт. 114.

ходящейся въ самой плоскости ( $CD$ ): то она съ сею плоскостію никогда не встрѣтится.

Пусть, если можно, прямая  $AB$  съ плоскостію  $CD$  встрѣчается въ какой нисешь точкѣ  $C$ ; прямая  $AB$  параллельна  $EF$  по положенію; посему обѣ сіи линіи находятся въ одной плоскости  $BE$  (73) и  $EF$  будетъ взаимное сѣченіе сей плоскости съ плоскостію  $CD$ ; чего ради  $EF$  продолженная пройдетъ чрезъ точку  $C$ ; и слѣдов.  $AB$  и  $EF$  взаимно встрѣнятся; чтоо противно положенію; слѣдов. и проч.

Отсюда происходитъ слѣдующее опредѣленіе:

352. *Опредѣленіе II.* Если прямая ( $AB$ ) и плоскость ( $CD$ ), въ коей первая не находится, ни по каждую сторону не встрѣчаются, сколь бы далече продолжены ни были; то та прямая ( $AB$ ), называемая *параллельною* сей плоскости ( $CD$ ).

353. *Присовок.* И такъ, когда прямая, находящаяся въ плоскости, будетъ параллельна другой прямой, находящейся въ самой плоскости, то она будетъ параллельна и сей плоскости (331).

Черт. 115.

354. *Опредѣленіе II.* Если прямая ( $AB$ ), встрѣчающаяся съ плоскостію ( $CD$ ) въ какой нисешь точкѣ ( $A$ ), не перпендикулярна ко всѣмъ прямымъ, чрезъ точку ея встрѣчи на оной плоскости проведеннымъ: то сія прямая называется *наклонною* къ оной плоскости; и уголъ ( $BAE$ ), составляемый ею и прямою ( $AE$ ), соединяющею точки встрѣчи линіи ( $AB$ ) и перпендикула ( $BE$ ), опущеннаго на плоскость изъ какой нисешь ея точки ( $B$ ), въ плоскости находящейся,

именуется *деломъ* наклоненія сей прямой линіи къ оной плоскости.

335. *Предложеніе IX.* Если трезъ пря- Черт. 116.  
мую ( $AB$ ), перпендикулярную къ плоскости ( $CD$ ), пройденъ какъ ишетъ другая плоскость ( $EF$ ): то изъ всякой точки ( $H$ ) взаимнаго сѣченія ( $EG$ ) плоскостей проведенная прямая ( $HI$ ) въ сей другой плоскости перпендикулярно къ оному, будетъ перпендикулярна къ первой плоскости ( $CD$ ).

Линія  $AB$ , перпендикулярная къ плоскости  $CD$ , есть перпендикулярна и къ  $EG$  (318); также по положенію  $HI$  перпендикулярна къ  $EG$  и съ  $AB$  въ одной плоскости; чего ради  $HI$  параллельна  $AB$  (74) и слѣдов. къ сей самой плоскости  $CD$  есть перпендикулярна (325).

Отсюда происходитъ слѣдующее опредѣленіе:

336. *Опредѣленіе IV.* Плоскость ( $EF$ ) къ плоскости ( $CD$ ) называется перпендикулярною, когда прямыя ( $AB$ ,  $HI$ ), проводимыя перпендикулярно ко взаимному ихъ сѣченію ( $EG$ ) въ одной изъ нихъ (какъ  $AB$ ), будутъ перпендикулярны къ другой (какъ  $CD$ ).

337. *Примовок.* Откуда явствуетъ, что плоскость, проходящая чрезъ перпендикуляръ къ другой плоскости, будетъ перпендикулярна къ сей другой плоскости (335); и обратно: сія другая плоскость будетъ перпендикулярна къ первой.

338. *Предложеніе X.* Плоскости ( $CD$  и Черт. 117.  
 $EF$ ), изъ коихъ къ той и другой прямая ( $AB$ ) есть перпендикулярна, ни по которую сторону не встрѣчаются между собою.

Пусть, если можно, плоскости  $CD$  и  $EF$  по довольномъ продолженіи встрѣшатъ.

ся въ прямой  $GH$  (19); на сея прямой возьми какую нибудь точку  $I$  и опъ ней проведи прямыя  $IA$  и  $IB$ ; опъ чего получиши треуг.  $AIB$ , въ коемъ  $AB$ , перпендикулярная къ плоскостямъ  $CD$  и  $EF$  по положенію, есть перпендикулярна къ сторонамъ его  $AI$  и  $BI$ ; что невозможно (62); слѣдов. и проч.

Откуда происходитъ слѣдующее опредѣленіе:

Черт. 118.

339. *Опредѣленіе V.* Плоскости ( $AB$  и  $CD$ ), кои ни по которую сторону не вспрѣчаются, сколь бы далече продолжены ни были, называются *параллельными*.

340. *Присовок. 1.* И пакъ плоскости, къ которымъ одна и шаже прямая перпендикулярна, суть между собою параллельны (338).

341. *Присовок. 2.* Отсюда явствуется, какъ чрезъ данную точку, по которую нибудь сторону данной плоскости находящуюся, провести плоскость параллельную сей данной (326 и 321).

342. *Предложеніе XI. С.* Если двѣ параллельныя плоскости ( $AB$  и  $CD$ ) пресѣкутся третьею плоскостію ( $EH$ ): то взаимныя ихъ сѣченія ( $EF$  и  $GH$ ) будутъ параллельны между собою.

Если  $EF$  и  $GH$  не параллельны: то по довольномъ продолженіи гдѣ нибудь вспрѣтятся; почему и самыя плоскости, на коихъ сии прямыя находятся, также вспрѣтятся; что противно положенію.

343. *Присовок. 1.* Откуда слѣдуетъ, что чрезъ данную точку, въ плоскости находящуюся, болѣе одной плоскости ей параллельной провести не можно (78).

344. *Присовок. 2.* Откуда же слѣдуетъ, что прямая, перпендикулярная къ одной изъ

параллельныхъ плоскостей, есть перпендикулярна и къ другой (79).

345. *Присовок. 3.* А изъ сего слѣдуетъ, что перпендикуляры, опущенные изъ точекъ одной изъ двухъ параллельныхъ плоскостей на другую, или поставленные на одной до пресѣченія съ другою, суть равны между собою (96).

346. *Опредѣленіе VI.* Плоскость ( $AC$ ) къ Черт. 119. плоскости ( $GH$ ) называется *наклонною*, когда прямыя ( $IK$ ,  $IL$ ), проводимыя въ нихъ перпендикулярно ко взаимному ихъ сѣченію ( $AB$ ), не перпендикулярны между собою; и уголъ ( $KIL$ ), который сіи прямыя составляютъ, именуется *угломъ наклоненія* одной плоскости къ другой; каковое наименованіе распространяется и на случай, когда плоскости взаимно суть перпендикулярны.

347. *Предложеніе XII.* Параллельныя плоскости ( $AC$  и  $DF$ ), встрѣгающіяся съ третьею плоскостію ( $GH$ ) въ какихъ нѣсть прямыхъ ( $AB$  и  $DE$ ), имѣютъ равные углы наклоненія къ сей плоскости.

Изъ какой нѣсть точки  $I$  прямой  $AB$  проведи въ плоскостяхъ  $AC$  и  $GH$  перпендикуляры къ оной  $IK$  и  $IL$  (51) и продолжи проходящую чрезъ нихъ плоскость, которая пресѣчетъ плоскость  $DF$  въ  $MN$ , параллельной  $IK$  (342), а плоскость  $GH$  въ  $MO$ ; чего ради уголъ  $KIL = \text{уг. } NMO$  (86).



## КНИГИ ТРЕТЬЕЙ ГЛАВА I.

## О толстых углахъ.



348. *Опредѣленіе.* Когда болѣе, нежели  
 Черт. 120. два плоскіе угла ( $BAC$ ,  $CAD$ ,  $DAB$ ), состав-  
 ленные при одной точкѣ ( $A$ ), сторонами  
 своими ( $AB$ ,  $AC$ ,  $AD$ ) взаимно прикасаются  
 и находясь въ разныхъ плоскостяхъ ( $BAC$ ,  
 $CAD$ ,  $DAB$ ): то содержимое ими неопредѣ-  
 ленное пространство ( $ABCD$ ), котораго  
 часть можно заключить плоскостію ( $EFG$ ),  
 оныя плоскіе углы пресекающею, называет-  
 ся *толстымъ угломъ*; каждый же изъ пло-  
 скихъ угловъ, содержащихъ толстый уголъ,  
*сторонаю*, а каждая изъ сторонъ сихъ пло-  
 скихъ угловъ, въ коихъ они взаимно при-  
 касаются, ребромъ его именуется.

349. *Предложеніе I.* Если въ двухъ  
 Черт. 121. толстыхъ углахъ ( $ABCD$  и  $EFGH$ ), содержи-  
 мыхъ тремя плоскими углами, два плоскіе  
 угла ( $BAC$  и  $BAD$ ) одного равны двумъ пло-  
 скимъ угламъ ( $FEG$  и  $FEN$ ) другаго, каждый  
 каждому по порядку, и наклоненіе плоско-  
 стей однихъ равныхъ плоскихъ угловъ равно  
 наклоненію плоскостей другихъ: то и осталь-  
 ный плоскій уголъ ( $CAD$ ) одного толстаго  
 угла равенъ остальному плоскому углу ( $CEH$ )  
 другаго и самый толстый уголъ ( $ABCD$ ) ра-  
 венъ толстому углу ( $EFGH$ ).

Взявъ на  $AB$  и  $EF$  части  $AI = EK$ , по-  
 ставъ въ плоск-хъ  $BAC$  и  $BAD$  къ  $AB$  пер-  
 пендикуляры  $IL$  и  $IN$ , а въ плоск-хъ  $FEG$  и

$FEN$  къ  $EF$  перпендикуляры  $KM$  и  $KO$  (51) и предсавъ, что ш. уг.  $ABCD$  положень въ ш. уг.  $EFGH$  шакъ, что точка  $A$  падаеть на  $E$ ,  $AB$  на  $EF$  и плоск.  $BAC$  на плоск.  $FEG$ ; поелику  $AI = EK$  по строенію, уг.  $BAC =$  уг.  $FEG$ , уг.  $LIN =$  уг.  $MKO$ , кои сунъ углы наклоненія (546), и уг.  $BAD =$  уг.  $FEK$  по положенію; то падушъ точка  $I$  на  $K$ ,  $AC$  на  $EC$ ,  $IL$  на  $KM$ ,  $IN$  на  $KO$ , плоск.  $BAD$  на плоск.  $FEN$  и  $AD$  на  $EN$ ; чего ради и плоск.  $CAD$  на плоск.  $GEN$ . И шакъ уг.  $CAD$  съ уг.  $GEN$  совмѣщается и ему равенъ; слѣдов. и самый ш. уг.  $ABCD$  совмѣщается съ ш. уг.  $EFGH$  и ему совершенно равенъ (51).

350. *Присовок.* Откуда явствуеть, что толстый уголъ, содержащій тремя плоскими углами, по даннымъ двумъ изъ нихъ и по данному углу наклоненія плоскостей ихъ, совершенно опредѣляется; и потому по симъ даннымъ всегда составленъ быть можеть.

Пусть даны два плоскіе  $BAC$  и  $FEN$  и уголъ Черт. 121.  $\varphi$  наклоненія плоскостей ихъ. Чрезъ какую нисть точку  $I$  прямой  $AE$  проведи къ ней перпендикулярную плоскость (321), пресѣкающую плоскій уг.  $BAC$  въ прямой  $IL$ ; при ней и при точкѣ  $I$  въ сей плоскости составъ уг.  $LIN =$  уг.  $\varphi$ , а въ плоскости, проходящей чрезъ  $AI$  и  $IN$ , уг.  $BAD =$  уг.  $FEN$  (50); чрезъ что и получишь ш. уг.  $ABCD$ , имѣющій данныя плоскіе углы сторонами и между ими уголъ наклоненія, равный данному таковому же углу  $\varphi$ .

351. *Предложеніе II.* Если въ двухъ толстыхъ углахъ ( $ABCD$  и  $EFGH$ ), содержи- Черт. 122. мыхъ тремя плоскими углами, плоскіе углы ( $BAC$ ,  $CAD$  и  $DAB$ ) одного равны плоскимъ угламъ ( $FEG$ ,  $GEN$  и  $NEF$ ) другаго, каждый каждому по порядку; то и наклоненія пло-

скостей къ плоскостямъ будутъ равны, а именно тѣхъ къ тѣмъ, на коихъ суть равныя плоскіе углы, и сильный толстый уголъ ( $ABCD$ ) равенъ толстому углу ( $EFGH$ ).

Сдѣлавъ тоже строеніе, что и въ предыдущемъ предложеніи, возьми  $IL = KM$  и  $IN = KO$  и проводи  $LP$  и  $NR$  прл-ныя  $AB$ ; а  $MQ$  и  $OS$  прл-ныя  $EF$ ; также проводи прямыя  $LN$ ,  $PR$ ,  $MO$  и  $QS$ .

Въ препеніяхъ  $AILP$  и  $EKMQ$  (91)  $AI = EK$  и  $IL = KM$  по строенію, уг.  $IAP =$  уг.  $KEQ$  по положенію, уг.  $AIL =$  уг.  $EKM$  и уг.  $ILP =$  уг.  $KMQ$ , какъ каждый прямой; почему уг.  $APL =$  уг.  $EQM$  (139),  $AP = EQ$  и  $LP = MQ$  (137). Также докажется, что въ препеніяхъ  $AINR$  и  $EKOS$ ,  $AR = ES$  и  $NR = OS$ ; чего ради, поелику уг.  $CAD =$  уг.  $GEN$  по положенію, въ треуг-хъ  $APR$  и  $EQS$  будетъ  $PR = QS$  (44). Но  $AI$ , перпендикулярная къ  $IL$  и  $IN$ , есть перпендикулярна и къ ихъ плоскости  $ILN$  (320); то  $LP$  и  $NR$  прл-ныя  $AI$ , также будутъ перпендикулярны къ сей плоскости и къ  $LN$  (325 и 319); по той же причинѣ и  $MQ$  и  $OS$  суть перпендикулярны къ  $MO$ . Теперь проводи  $RT$  и  $SU$  прл-ныя  $NL$  и  $OM$ ; усмотришь, что въ препеніяхъ  $PRT$  и  $QSU$ ,  $PR = QS$ ,  $PT = QU$  и уг.  $PTB =$  уг.  $QUS$ , какъ равныя прямымъ (77); почему  $RT = SU$  (69) и  $LN = MO$  (96). И такъ въ треуг-хъ  $ILN$  и  $EMO$ , уг.  $LIN =$  уг.  $MEO$  (47), кои суть углы наклоненія плоскостей  $BAC$  и  $FEG$  къ плоскостямъ  $BAD$  и  $FEN$  (546); чего ради ш. уг.  $ABCD =$  ш. уг.  $EFGH$  (549).

352. Присовок. Откуда явствуетъ, что толстый уголъ по тремъ плоскимъ угламъ, его содер-

жащимъ, совершенно опредѣляется; и потому по симъ даннымъ всегда составленъ быть можешь, когда мѣсто будущъ имѣть условія, изложенныя въ слѣдующихъ двухъ леммахъ.

**353. Предложеніе III. А. Если толстый уголъ (ABCD) будетъ содержилъ триа плоскими углами (BAC, CAD и DAB):** Черт. 123.  
то каждыя два изъ сихъ плоскихъ угловъ больше остальнаго.

1) Если всѣ углы равны между собою: то явнѣ, что каждыя два изъ нихъ больше остальнаго.

2) Если же не равны: то пусть уголъ BAC больше угла BAD. Въ плоскости BAC составь уг. BAE = уг. BAD (50) и, взявъ на AB и AC какія ниесъ точки F и G, проведи прямоу FEG; потомъ возми AH = AE и проведи прямыя FH и GH; найдешь, что треуг. AFH = треуг. AFE и FH = FE (44); но FH + HG > FE + EG (14) или HG > EG; почему въ треуг-хъ AGH и AGE, уг. HAG > уг. GAE (46). Слѣдов. уг. HAG + уг. HAF > уг. GAE + уг. FAE или, все тоже, уг. DAC + уг. DAB > уг. BAC.

**354. Предложеніе IV. А. Если толстый уголъ (ABCD) будетъ содержилъ триа плоскими углами (BAC, CAD и DAB):** то всѣ сіи плоскіе углы, вѣснѣ взятыя, меньше четырехъ прямыхъ.

Развѣки плоскости сихъ угловъ какоу ниесъ плоскостію чрезъ точку А не проходящею; и пусть взаимныя ихъ сѣченія будутъ FG, GH и HF, которыя, какъ то явнѣ, составяють треуг. FGH. Каждый изъ трехъ толстыхъ угловъ при точкахъ F, G и H содержимъ тремя плоскими углами; посе-

му  $\text{уг. } FGA + \text{уг. } AGH > \text{уг. } FGH$ ,  $\text{уг. } GHA + \text{уг. } AHF > \text{уг. } GHF$  и  $\text{уг. } HFA + \text{уг. } AFG > \text{уг. } HFC$ ; почему  $\text{уг. } FGA + \text{уг. } AGH + GHA + \text{уг. } AHF + \text{уг. } HFA + \text{уг. } AFG > \text{уг. } FGH + \text{уг. } GHF + \text{уг. } HFC$ ; но первые шесть угловъ съ углами  $FAC$ ,  $GAN$  и  $NAF$  составляютъ углы преуг-въ  $AFG$ ,  $AGH$  и  $AHF$  и, вмѣстѣ взятые, равны шести прямымъ (81); чего ради по отнятіи отъ шести прямыхъ шести угловъ  $FGA$  и  $AGH$ ,  $GHA$  и  $AHF$ ,  $HFA$  и  $AFG$ , кои больше угловъ преуг-ва  $GFH$  (552) и слѣдов. больше двухъ прямыхъ, останутся при угла  $FAC$ ,  $GAN$  и  $NAF$ , или, все то же, при угла  $BAC$ ,  $CAD$  и  $DAB$ , кои меньше четырехъ прямыхъ.

355. Присовок. Подобнымъ образомъ докажется, что какихъ бы числомъ плоскихъ угловъ толстый уголъ содержимъ ни былъ, всѣ сии плоскіе углы, вмѣстѣ взятые, суть также меньше четырехъ прямыхъ (158).

356. Предложеніе V. С. II-го По даннымъ тремъ плоскимъ угламъ ( $ABC$ ,  $DEF$  и  $GHI$ ), изъ коихъ каждый два, вмѣстѣ взятые, больше остальнаго, и всѣ три, вмѣстѣ взятые, меньше четырехъ прямыхъ, составить толстый уголъ.

На сторонахъ данныхъ плоскихъ угловъ возми  $AB = BC = DE = EF = GH = HI$  и изъ прямыхъ  $AC$ ,  $DF$  и  $GI$ , соединяющихъ концы ихъ, составь преуг.  $KLM$  (48), въ коемъ  $LK = AC$ ,  $KM = GI$  и  $LM = DF$ ; потомъ, описавъ около него кругъ  $LKM$  (293), изъ центра его  $N$  поставь перпендикуляръ  $NQ$  (322); проведи радіусы  $NL$ ,  $NK$  и  $NM$ , найди кдр.  $NQ = \text{кдр. } AB = \text{кдр. } NK$  (126) и отложивъ  $NQ$  проведи прямыя  $QK$ ,  $QL$  и  $QM$ ; изъ прмг-хъ преуг.  $QNL$ ,  $QNK$  и  $QNM$  (519), найдешь, что  $QL = QK = QM$  (44); по кдр.  $AB = \text{кдр. } NQ + \text{кдр. } NK$  по строенію и въ преуг-вѣ  $QNK$  кдр.  $QK = \text{кдр. } NQ + \text{кдр.}$

$\overline{NA}$  (115); чего ради  $OK = AB$ . И такъ треуг.  $LQK$   $\equiv$  треуг.  $ABC$ , треуг.  $KQM \equiv$  треуг.  $GHI$  и треуг.  $QLM \equiv$  треуг.  $DEF$  (47); почему т. уг.  $QKLM$ , имѣющій данные плоскіе углы сторонами, есть требуемый.

357. Предложеніе VI. С. При данной прямой  $(AB)$  и при данной на ней точкѣ  $(A)$  составить Черт. 125. плоскій уголъ, равный данному тупому углу  $(CDEF)$ , содержащему триа плоскими  $(DCE, DCF$  и  $FCE)$ .

Изъ какой внести точки  $F$  ребра  $CF$  опуститъ на плоскость  $DCE$  перпендикуляръ  $FG$  (326) и чрезъ  $G$  проводи прямую  $CG$ ; потомъ, при точкѣ  $A$  прямой  $AB$  въ одной плоскости составивъ уг.  $BAH \equiv$  уг.  $DCE$  и уг.  $BAI \equiv$  уг.  $DCG$  (50), поставивъ на сей плоскости, отложивъ  $AI \equiv CG$ , перпендикуляръ  $IK \equiv GF$  (322); по проведеніи прямой  $AK$  будешь имѣть требуемый т. уг.  $ABHK$ .

Взявъ по произволению  $AB \equiv CD$  и  $AH \equiv CE$ , проводи прямыя  $BI, BK, HI, HK$  и  $DG, DF, EG$  и  $EF$ ; усмотришь, что въ треуг-хъ  $BAI$  и  $DCG$ , въ коихъ уг.  $BAI \equiv$  уг.  $DCG$  по строенію,  $BI \equiv DG$  и въ треуг-хъ  $IAH$  и  $GCE$ , въ коихъ уг.  $IAH \equiv$  уг.  $GCE$  (32; 5),  $IH \equiv GE$ ; въ прим-хъ треуг.  $AIK$  и  $CGF$ ,  $AK \equiv CF$  и въ таковыхъ же треуг.  $BIK$  и  $DGF$ ,  $KI \equiv DF$  и  $HK \equiv FE$  (44); чего ради въ треуг-хъ  $BAK$  и  $DCF$  уг.  $BAK \equiv$  уг.  $DCF$ ; въ треуг-хъ  $KAH$  и  $FCE$  уг.  $KAH \equiv$  уг.  $FCE$  (47), и потому т. уг.  $ABHK \equiv$  т. уг.  $CDEF$  (351).

358. Предложеніе VII. Если въ двухъ тупыхъ углахъ  $(ABHK$  и  $CDGEF)$ , содержи- Черт. 125. мыхъ болѣе, нежели тремя плоскими углами  $(BAK, BAI, IAH, HAK$  и  $DCF, DCG, GCE, ECF)$ , плоскіе углы, кромѣ одного  $(HAK)$ , одного тупаго угла равны плоскіи углы, кромѣ одного  $(ECF)$ , другаго тупаго угла, каждый каждому по порядку, и наклоненій плоскостей однихъ равныхъ плоскіи угловъ  $(BAK, BAI, IAH)$  равны наклоненію плоска-

стей других ( $DCF$ ,  $DCG$ ,  $CCE$ ), каждое каз-  
дому по порядку: то и оставший плоскій  
уголъ ( $НАК$ ) одного толстаго угла равенъ  
остальному плоскому углу ( $ECF$ ) другаго, и  
самый толстый уголъ ( $АВІНК$ ) равенъ тол-  
стому углу ( $CDGEF$ ).

Черезъ ребра  $AI$  и  $AK$ ,  $CG$  и  $CF$  пред-  
ставъ проходящія плоскости; получишь т.  
уг.  $ABIK =$  т. уг.  $CDGF$  (349) и наклоненіе  
плоск-ей  $AIK$ ,  $AIH$  равное наклоненію плос-  
ск-ей  $CCF$ ,  $CCE$ : ибо накл. плоск-ей  $AIB$ ,  $AIH$   
 $=$  накл. плоск-ей  $CGD$ ,  $CCE$  по положенію;  
потомъ получишь толстые углы  $AIKH$  и  
 $CGFE$ , въ коихъ пл. уг.  $IAK =$  пл. уг.  $CCF$ ,  
пл. уг.  $IAH =$  пл. уг.  $CCE$ , накл. плоск-ей  $AIK$ ,  
 $AIH =$  накл. плоск-ей  $CGF$ ,  $CCE$ , и кои по-  
сему равны между собою (349); чего ради пл.  
уг.  $НАК =$  пл. уг.  $ECF$  и т. уг.  $ABINK =$  т.  
уг.  $CDGEF$ .

359. Присовок. Откуда явствуетъ, что тол-  
стый уголъ, содержимый болѣе, нежели тремя пло-  
скими углами, совершенно опредѣляется, когда да-  
ны будутъ всѣ плоскіе углы, его содержащіе, кро-  
мѣ одного, и углы наклоненія плоскостей данныхъ  
угловъ; и потому по симъ даннымъ, примѣняясь къ  
показанному строенію въ присовокупленіи къ I-му  
предложенію (350), всегда его составить можно,  
когда мѣсто имѣть будетъ условіе, состоящее  
въ томъ, чтобы данные углы, содержащіе толстый  
уголъ, вмѣстѣ взятые были меньше четырехъ пра-  
мыхъ (351).

## КНИГИ ТРЕТЬЕЙ ГЛАВА III.

## О пирамидахъ и призмахъ.



360. *Опредѣленіе I.* Определенное пространство ( $ABCDEF$ ), содержащее плоскостями ( $BCDEF$ ,  $ABC$ ,  $ACD$ ,  $ADE$ ,  $AEF$ ,  $AFB$ ), изъ коихъ одна ( $BCDEF$ ) есть какой нибудь многоугольникъ, а прочія всѣ суть треугольники, сплюсшіе на сторонахъ сего многоугольника, какъ основанійхъ, и имѣющіе свои вершины соединенными въ одной точкѣ ( $A$ ), находящейся внѣ плоскости того многоугольника, называется *пирамидою*; и каждый изъ сихъ треугольниковъ порознь *стороною*, а всѣ вмѣстѣ *поверхностію* ея именуется; каждая же изъ прямыхъ ( $AB$ ,  $AC$ ,  $AD$ ,  $AE$ ,  $AF$ ), кои суть общія стороны двухъ смежныхъ треугольниковъ, *ребромъ* ея называется.

Черт. 126.

361. *Примовок. 1.* Плоскость, на которой пирамиду представляемъ сплюсшею, *основаніемъ* ея называется. Когда основаніе сіе будетъ треугольникъ, тогда она именуется *трехсторонною*; если четырехугольникъ, *четырехсторонною*; если же пятиугольникъ, *пятисторонною*, и такъ далѣе.

362. *Примовок. 2.* Изъ вершины пирамиды, опущенный на плоскость ея основанія перпендикуляръ, за *высоту* оной пріемлется.

363. *Опредѣленіе II.* Если пирамида ( $ABCDEF$ ) разсѣчется плоскостію ( $GHIKL$ ), параллельною ея основанію, и чѣмъ, въ коей находится оной вершина ( $A$ ), опишемся; то оставшееся определенное пространство

(*BCDEFGHIKL*) усѣзкою пирамидою называется.

Черт. 128. 364. *Опредѣленіе III.* Определенное пространство (*ABCDEFGHIKL*), содержимое плоскостями (*ABCDE, FGHIK, ABGF, BCHG, CDIH, DEKI, EAFK*), изъ коихъ двѣ (*ABCDE* и *FGHIK*) суть совершенно равныя и параллельныя между собою, а прочія всѣ суть параллелограммы, называется *призмою*; и каждый изъ сихъ параллелограммовъ порознь *стороною*, а всѣ вмѣстѣ *поверхностію* ея именуются; каждая же изъ прямыхъ (*AF, BG, CH, DI, EK*), кои суть общія стороны двухъ смежныхъ параллелограммовъ, *ребромъ* ея называется.

365. *Присовок. 1.* Въ призмѣ двѣ совершенно равныя и параллельныя плоскости называются ея *основаніями*, одно *нижнимъ*, а другое *верхнимъ*. Когда основанія сѣмъ будутъ треугольники, тогда она именуется *треухсторонною*; если чепыреугольники, *четырехсторонною*; если же пятиугольники, *пятисторонною*, и такъ далѣе.

При чемъ, если ребра призмы перпендикулярны къ ея основаніямъ, то она называется *прямою призмою*; если же нѣтъ, то *наклонною*.

366. *Присовок. 2.* Перпендикуляръ, поставленный на одной изъ параллельныхъ плоскостей призмы и продолженный до пресѣченія съ другою, за *высоту* оной принимается.

367. *Опредѣленіе IV.* Пирамида или *призма* называется *правильною*, когда основаніе пирамиды или каждое изъ основаній призмы есть какой нибудь правильный многоугольникъ и ребра пирамиды суть всѣ меж-

ду собою равныя, а ребра призмы сверхъ сего еще къ основаніямъ перпендикулярныя.

368. *Присовок. 1.* Отсюда слѣдуетъ, что въ правильныхъ пирамидахъ и призмахъ всѣ стороны суть между собою совершенно равныя (47 и 105).

369. *Присовок. 2.* Отсюда же слѣдуетъ, что поверхность всякой правильной пирамиды равна треугольнику, у коего основаніе есть периметръ основанія пирамиды, а высота равная высотѣ одной изъ сторонъ ея (110 и 147); поверхность же всякой правильной призмы равна прямоугольнику, у коего основаніе есть периметръ основанія призмы, а высота равная одному изъ ея реберъ (105 и 147).

*Примѣч.* Высота одной изъ сторонъ правильной пирамиды апотемой называется.

370. *Предложеніе I.* Если въ имѣющихъ равноуголѣхъ стороны пирамидахъ ( $ABCDEF$  и Черт. 127.  $GHIKLM$ ) основаніе ( $BCDEF$ ) одной совершенно равно основанію ( $HIKLM$ ) другой и двѣ стороны сраду ( $ABC$  и  $ACD$ ) одной равны двумъ сторонамъ сраду ( $GHI$  и  $GIK$ ) другой, каждая каждой, или, все то же, вѣсто сторонъ, одинъ толстый уголъ ( $CBAD$ ) при основаніи одной равенъ соответствующему одному толстому углу ( $IHGK$ ) при основаніи другой и одно ребро ( $AC$ ) одной равно одному ребру ( $GI$ ) другой, кои суть при оныхъ равныхъ толстыхъ углахъ: то оныя пирамиды совершенно равны между собою.

Представь, что прд.  $ABCDEF$  положена въ прд.  $GHIKLM$  такъ, что точка  $C$  падаетъ на  $I$ , прямая  $CD$  на  $IK$  и основ.  $BCDEF$  на основ.  $HIKLM$ ; сіи основанія, совершенно равныя по

положенію, совмѣстятся, то есть, ребра  $DE$ ,  $EF$ ,  $FB$ ,  $BC$  падутъ на  $KL$ ,  $LM$ ,  $MH$ ,  $HI$  и точки  $D$ ,  $E$ ,  $F$ ,  $B$ . на  $K$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $H$ , (137). Также по положенію стороны  $ABC$  и  $ACD =$  сторонамъ  $CHI$  и  $GIK$  или т. уг.  $CBAD =$  т. уг.  $IHGK$  и  $AC = GI$ ; посему плоскости  $DCA$  и  $BGA$  падутъ на плоскости  $KIG$  и  $HIG$ , ребро  $AC$  на  $GI$ , точка  $A$  на  $G$ , ребра  $AD$  и  $AB$  на  $GK$  и  $GH$  (44), и будетъ т. уг.  $DCAE =$  т. уг.  $KIGL$  (349), уг.  $ADE =$  уг.  $GKL$  и  $AE = GL$  (44). Подобнымъ образомъ докажется равенство прочихъ толстыхъ угловъ и ихъ реберъ. И такъ въ прѣхъ  $ABCDEF$  и  $CHIKLM$  основаніе, толстые углы и стороны одной съ основаніемъ, толстыми углами и сторонами другой совмѣщаются; чего ради сіи пирамиды суть совершенно равны между собою (31).

371. *Присовок.* Откуда явствуетъ, что пирамида по основанію, одному толстому углу при ономъ и ребру при данномъ толстомъ углѣ совершенно опредѣляется; и потому по симъ даннымъ всегда составлена быть можетъ.

Черт. 127. Пусть даны основ.  $BCDEF$ , при немъ т. уг.  $CABD$  и прямая  $X$ , коей должно быть равно ребро составляемой пирамиды. Въ данномъ т. уг.  $CABD$  возьми ребро  $AC = X$  и изъ  $A$  проводи до вершинъ прочихъ угловъ основанія прямыя  $AB$ ,  $AD$ ,  $AE$  и  $AF$ ; чрезъ что и будешь имѣть требуемую пр.  $AECDEF$ .

372. Предложеніе II. Если въ имѣющихъ Черт. 128. равноуголыя стороны призмъ ( $ABCDEFCHIK$  и  $LMNOPQRSTU$ ), основаніе ( $ABCDE$ ) одной совершенно равно основанію ( $LMNOP$ ) другой и двѣ стороны сряду ( $ABGF$  и  $BCIH$ ) одной равны двумъ сторонамъ сряду ( $LMRQ$  и  $MNSR$ ) другой, каждая каждой, или, все то же, вѣсто сторонъ, одинъ толстый уголъ

(*BAGC*) при основаніи одной равенъ соответствующему толстому углу (*MLRN*) при основаніи другой и ребро (*BC*) одной равно ребру (*MR*) другой: то оныя призмъ совершенно равны между собою.

Представъ, что призм. *ABCDEFGHİK* положена въ призм. *LMNOPQRSTU* такъ, что точка *B* падаетъ на *M*, прямая *BC* на *MN* и основ. *ABCDE* на основ. *LMNOP*; сіи основанія, совершенно равныя по положенію, совмѣстятся, то есть, ребра *CD*, *DE*, *EA*, *AB* падутъ на *NO*, *OP*, *PL*, *LM*, и точки *C*, *D*, *E*, *A* на *N*, *O*, *P*, *L*, (137). Также по положенію, стороны *ABGF* и *BCHG* = сторонамъ *LMRQ* и *MNSR* или ш. уг. *BAGC* = ш. уг. *MLRN* и *BC* = *MR*; поему плоскости *ABGF*, *BCHG* падутъ на плоск. *LMRQ*, *MNRS*, ребра *BC*, *AF*, *CH*, *GF*, *GH* на *MR*, *LQ*, *NS*, *RQ*, *RS*, и точки *G*, *F*, *H* на *R*, *Q*, *S* (105). Но основ. *FGHİK* = основ. *ABCDE*, основ. *QRSTU* = основ. *LMNOP* (364) и основ. *ABCDE* = основ. *LMNOP* по положенію; чего ради основ. *FGHİK*, лежа ребрами *FG*, *GH* и точками *F*, *G*, *H* на ребрахъ *QR*, *RS* и точкахъ *Q*, *R*, *S* основанія *QRSTU*, съ симъ послѣднимъ совмѣстятся, и ребра *HI*, *İK*, *KF* падутъ на *ST*, *TU*, *UQ*, точки *I*, *K* на *T*, *U* (137) и *DI*, *EK* на *OT*, *PU* (105). И такъ въ призмахъ *ABCDEFGHİK* и *LMNOPQRSTU* основанія, стороны и толстые углы одной совмѣщаются съ основаніями, сторонами и толстыми углами другой; чего ради сіи призмъ суть совершенно равны между собою (51).

373. Присовок. Откуда яствуетъ, что призма по данному основанію, одному толстому углу при

немъ и ребру совершенно опредѣляется; и потому по симъ даннымъ всегда составлена быть можетъ.

Черт. 128. Пусть даны основ.  $ABCDE$ , при немъ ш. уг.  $BGAC$  и прямая  $F$ , коей должно быть равно ребро составленной призмы. Въ данномъ ш. уг.  $BGAC$  возми ребро  $BG = F$ , проведи чрезъ точку  $G$  плоскость параллельную данному основанію, а изъ вершинъ прочихъ угловъ онаго до пресѣченія съ нею прямыхъ  $CH$ ,  $DI$ ,  $EK$  и  $AF$  прямихъ ребру  $BG$ , и представи проходящія чрезъ нихъ плоскости, пересѣкающіяся съ параллельною основанію плоскостію въ прямыхъ  $GH$ ,  $HI$ ,  $IK$ ,  $KF$  и  $FG$ ; чрезъ что и будешь имѣть призму  $ABCDEFGHNIK$ .

## КНИГИ ТРЕТЬЕЙ ГЛАВА IV.

### О параллелепипедахъ.

Черт. 129. 374. *Опредѣленіе I.* Опредѣленное пространство ( $AECG$ ), содержащее шесть плоскостями ( $AC$ ,  $EG$ ,  $AF$ ,  $DC$ ,  $AE$  и  $BC$ ), изъ коихъ каждыя противоположныя двѣ суть параллельны между собою, называется *параллелепипедомъ*; и всякая изъ сихъ плоскостей, содержащихъ параллелепипедъ, именуется *сторонаю*, а всѣ вмѣстѣ *поверхностію* онаго именуются; всякая же изъ прямыхъ ( $AB$ ,  $BC$  и проч.), въ коихъ сѣжныя двѣ стороны взаимно пересѣкаются, *ребромъ* его называется.

375. *Примовок. 1.* Та изъ сторонъ параллелепипеда, на коей представляемъ оный стоящимъ, *основаніемъ* его именуется, и при томъ *нижнимъ*, для отличія отъ *верхняго*.

ное есть сторона ему противоположная. Если прочія стороны параллелепипеда будутъ къ одному изъ сихъ оснований перпендикулярны, то оный называется *прямымъ*; если же итъ, то *наклоннымъ*.

376. *Присовок. 2.* Перпендикуляръ, опущенный на одномъ изъ оснований параллелепипеда и продолженный до пересѣченія съ плоскостію другаго, за *высоту* оного принимается.

377. *Предложеніе I. Л.* Въ параллелепипедѣ ( $AECG$ ) всѣ стороны ( $AC$ ,  $EG$ ,  $AF$ ,  $DC$ ,  $АН$  и  $BG$ ) суть параллелограммы; и каждыя противоположащія два изъ сихъ параллелограммовъ суть совершенно равныя между собою. Черт. 129.

1) Плоскости  $AF$  и  $DC$ ,  $АН$  и  $BG$  параллельныя между собою (374) пресѣкаются плоскостію  $AC$  въ прямыхъ  $AB$  и  $DC$ ,  $AD$  и  $BC$  также параллельныхъ между собою (342); чего ради плоскость  $AC$ , сторона параллелепипеда  $AECG$ , есть параллелограммъ (92). Также докажется, что и каждая изъ сторонъ  $EC$ ,  $AF$ ,  $DC$ ,  $АН$ ,  $BG$  есть параллелограммъ.

2) Стороны  $AF$  и  $АН$ , по доказанному, суть параллелограммы; чего ради  $AB$  и  $AD$  прямы и  $\angle EFB$  и  $\angle EHN$ , каждая каждой (94) и  $\angle BAD = \angle FEN$  (330); почему  $\angle ACF = \angle ECG$  (105). Также докажется, что  $\angle ACF = \angle ECG$  и  $\angle AHN = \angle BCG$ .

378. *Присовок.* Откуда явствуетъ, что если у параллелепипеда три соприкосновенныя стороны будутъ прямоугольниками; то и прочія будутъ прямоугольниками же.

Изъ чего происходятъ слѣдующія опредѣленія:

379. *Опредѣленіе II.* Параллелепипедъ, у котораго всѣ стороны прямоугольниками,

называется параллелепипедомъ прямоугольнымъ.

380. *Определение III.* Параллелепипедъ, у котораго всѣ стороны суть квадраты, именуется кубомъ.

Черт. 129. 381. *Предложеніе II.* А. Всякой параллелепипедъ ( $AECG$ ) діагональною плоскостію ( $ACGE$ ) раздѣляется на двѣ равныя трехсторонныя призмы ( $ABCEFG$  и  $CDAGHE$ ).

Ребро  $AE$ , равное и параллельное  $BF$ , равно и параллельно  $CG$  (329); чего ради четырехуг.  $ACGE$  есть параллелограммъ (104),  $AC = EG$  (94); трехуг.  $ABC =$  трехуг.  $EFG$ , трехуг.  $CDA =$  трехуг.  $GHE$  (47) и опредѣляемыя пространства  $ABCEFG$  и  $CDAGHE$  суть призмы (364). Но данный параллелепипедъ можетъ быть или прямой или наклонный; чего ради два случая здѣсь имѣютъ мѣсто:

№ 1.

1) Пусть пред.  $AECG$  есть прямой. Въ призмахъ  $ABCEFG$  и  $CDAGHE$ , основ.  $ABC =$  основ.  $CDA$  (95), прмг.  $AF =$  прмг.  $DG$  и прмг.  $BC =$  прмг.  $HA$  (377); чего ради призм.  $ABCEFG =$  призм.  $CDAGHE$  (372).

№ 2.

2.) Пусть пред.  $AECG$  есть наклонный. Черезъ точки  $A$  и  $E$  проводи къ ребру  $AE$  перпендикулярныя плоскости  $AK$  и  $EM$  (321); сѣи плоскости, пресекаясь съ сторонами параллелепипеда, составляютъ прямой пред.  $AEKM$  (370) и діагональную оного плоскость  $AKME$ . Теперь въ пред-хъ  $AIKCB$  и  $ELMGF$ , основ.  $IKCB =$  основ.  $LMGF$  (105), уг.  $AIB =$  уг.  $ELF$  (77), уг.  $AIK =$  уг.  $ELM$  (350) и  $AI = EL$  (94); чего ради пирамиды сѣи равны между собою (370) и слѣдов. призм.  $AIKELM =$  призм.  $ABCEFG$ . Также докажется, что пред.  $CKDA =$  пред.  $GMHE$  и призм.  $KDLMHE =$  призм.

**CDAGHE.** Но по доказанному въ первомъ случаѣ прѣм.  $AIKELM =$  прѣм.  $KDAMHE$ ; чего ради прѣм.  $ABCEFG =$  прѣм.  $CDAGHE$ .

**382. Присовок.** Отсюда явствуетъ, что всякая трехсторонняя призма есть половина параллелепипеда, имѣющаго при основаніи толстый уголъ и три ребра, равные такому же толстому углу и тремъ ребрамъ оной призмы.

**383. Предложеніе III.** Когда три соприкосновенныя ребра ( $AB$ ,  $AD$  и  $AE$ ) одного параллелепипеда ( $AECG$ ) равны тремъ соприкосновеннымъ ребрамъ ( $IK$ ,  $IM$  и  $IN$ ) другого ( $INLP$ ), каждое каждому по порядку, и толстый уголъ одного равенъ толстому углу другого, а именно, которые сунтъ при сихъ равныхъ соприкосновенныхъ ребрахъ: то таковыя параллелепипеды совершенно равны между собою. Черт. 130.

Проведи въ прѣд-хъ  $AECG$  и  $INLP$  діагональныя плоскости  $BDHF$  и  $KMQO$ ; онѣ раздѣляютъ параллелепипеды пополамъ (381); но сіи половины ихъ призмы  $DABHEF$  и  $MIKQNO$  совершенно равны между собою (95 и 372); чего ради прѣд.  $AECG =$  прѣд.  $INLP$  (147).

**384. Присовок. 1.** Отсюда явствуетъ, что параллелепипедъ по тремъ соприкосновеннымъ ребрамъ и толстому при нихъ углу совершенно опредѣляется; и потому по симъ даннымъ всегда составленъ быть можетъ.

Пусть даны три прямыя  $A$ ,  $B$  и  $C$  и т. Черт. 131.  
уг.  $DEFG$ ; и пусть назначится, на какихъ ребрахъ даннаго толстаго угла должны быть взяты равныя даннымъ прямымъ: ибо въ противномъ случаѣ вопросъ будетъ неопредѣленный. Возми на ребрахъ  $DE$ ,  $DF$  и  $DG$  части

$DH = A$ ,  $DI = B$  и  $DK = C$  и чрезъ точки  $H$ ,  $I$  и  $K$  проведи плоскости  $HO$ ,  $IO$  и  $KO$  параллельныя плоскостямъ  $DM$ ,  $DN$  и  $DL$ , каждую каждой (341) до пресѣченія ихъ въ прямыхъ  $HL$ ,  $HN$ ,  $IL$ ,  $IM$ ,  $KM$ ,  $KN$ ,  $LO$ ,  $ON$  и  $OM$  (119), чрезъ что и будешь имѣть требуемый прил.  $DKLO$  (374).

385. *Присовок. 2.* Если въ данномъ ш. уг.  $DEFG$  одно ребро перпендикулярно къ плоскости, содержащей другими ребрами, то прил.  $DKLO$  будетъ прямой (375); если же всѣ ребра ш. угла  $DEFG$  взаимно другъ къ другу перпендикулярны, то прямоугольный (379); наконецъ если въ послѣднемъ случаѣ  $A$ ,  $B$  и  $C$  будутъ равны между собою, то прил.  $DKLO$  будетъ кубъ (380).

386. *Присовок. 3.* Изъ чего явствуетъ, что прямоугольные параллелепипеды суть совершенно равны между собою, когда соприкосновенныя при ребра одного равны тремъ соприкосновеннымъ ребрамъ другого, каждое каждому; а кубы совершенно равны между собою, когда одно ребро одного равно одному ребру другого.

*Примѣч.* Посему мы можемъ всякой прямоугол. параллелепипедъ изображать чрезъ три его ребра или, все то же, чрезъ его основаніе и ребро перпендикулярное къ оному; а кубъ только чрезъ одно ребро его.

Черт. 132. 587. *Предложеніе IV. А. Параллелепипеды* ( $AECG$  и  $AICL$ ), стоящіе на томъ же основаніи ( $AC$ ) и содержащіеся между тѣхъ же параллельныхъ плоскостей ( $AC$  и  $EL$ ), величинаю суть равны между собою.

Верхнія основанія параллелепипедовъ могутъ содержаться и не содержаться между

тѣхъ же параллельныхъ прямыхъ; посему здѣсь два случая имѣютъ мѣсто:

1.) Пусть верхнія основ.  $EC$  и  $IL$  прид-въ  $AECC$  и  $AICL$  содержатся между тѣхъ же параллельныхъ прямыхъ  $EK$  и  $HL$ . Въ сихъ верхнихъ основаніяхъ можетъ быть ребро  $EL$  или равно (№ 1), или меньше (№ 2) или больше (№ 3) ребра  $EF$ ; посему первый случай также подъ тремя видами представляется; но во всѣхъ сихъ видахъ доказательство есть одно общее.

№ 1, 2  
и 3.

Въ самомъ дѣлѣ въ призм-хъ  $DHMAEI$  и  $CGLBFK$ , основ.  $DHM =$  основ.  $CGL$  (47), уг.  $DHE =$  уг.  $CGF$  (55о), уг.  $ENG =$  уг.  $FGL$  (77) и  $HE = GF$  (96); почему, по описаніи сихъ равныхъ (572) призмъ, сперва одной, а потомъ другой опять опредѣленнаго пространства  $ABCDEKLN$ , заключимъ, что прид.  $AECC =$  прид.  $AICL$ .

2.) Пусть верхнія основанія  $EC$  и  $IL$  прид-въ  $AECC$  и  $AICL$  не содержатся между тѣхъ же параллельныхъ прямыхъ. Представимъ сихъ параллелепипедовъ стороны  $ADHE$  и  $BCCF$ ,  $AIKI$  и  $DCLM$  продолженными; усмотримъ, что взаимными ихъ пресѣченіями опредѣлится прид.  $ABCDNOPQ$  (542 и 574), который, по первому случаю, равенъ каждому изъ прид-въ  $AECC$  и  $AICL$ ; чего ради прид.  $AECC =$  прид.  $AICL$ .

№ 4.

388. *Примечокъ.* Отсюда слѣдуетъ, что всякой наклонный параллелепипедъ равенъ прямому или еще прямоугольному параллелепипеду, стоящему съ нимъ на томъ же или на равномъ ему (109) основаніи и содержащемуся между тѣхъ же параллельныхъ плоскостей.

Пусть прид.  $AECC$  есть наклонный. На черт. 133. основаніи его  $ABCD$  поставимъ перпендикуля-

ры  $AI$ ,  $BK$ ,  $CL$  и  $DM$  (322) и продолжимъ ихъ до пресѣченія съ плоскостію верхняго основ.  $EFGH$ ; получимъ прямой (375) или еще, если основ.  $ABCD$  есть прямоугольникъ, прямоугольный (379) прид.  $AICL =$  прид.  $AECG$  (387). Если же основ.  $ABCD$  не прямоугольникъ, поставимъ въ плоскости онаго перпендикуляры  $AN$  и  $BO$  (51) и проведемъ чрезъ  $AN$  и  $AI$ , чрезъ  $BO$  и  $BK$  плоскости  $AP$  и  $BQ$ ; отъ пресѣченія ихъ съ сторонами прямого прид.  $AICL$  произойдетъ новый прид.  $AIOQ$ , который есть прямоугольный (379) и, какъ имѣющій съ прямымъ общее основ.  $ABKI$  и содержащійся съ нимъ между тѣхъ же параллельныхъ плоскостей, сему равный (387), а потому равный и наклонному прид.  $AECG$ .

389. Предложеніе V. Параллелепипеды, стоящіе на равныхъ основаніяхъ и имѣющіе равныя высоты, величиною суть равны между собою.

Черт. 134.

Пусть даны прямоугольные прид.  $AECG$  и  $INLO$ , у коихъ основ.  $AC =$  основ.  $IL$  и выс.  $AE =$  выс.  $IN$ . На продолженной  $DC$  возми  $CP = IK$  и чрезъ  $P$  проводи плоскость  $QPR$ , параллельную прмт-ку  $DE$  (341) и пресѣкающую продолженные прмт-ки  $AC$ ,  $AF$ ,  $DG$  и  $EG$  въ прямыхъ  $PR$ ,  $ST$ ,  $PQ$  и  $QU$  (19); потомъ проводи  $PB$  до пресѣченія съ  $DA$  въ точкѣ  $V$  и чрезъ  $V$  плоскость  $ZVR$ , параллельную прмт-ку  $AF$  (341) и пресѣкающую плоскость  $QPR$  въ  $KU$ , а продолженные прмт-ки  $DE$ ,  $AC$  и  $CF$  въ прямыхъ  $VZ$ ,  $VR$ , и  $XU$ ; усмотришь, что определенное пространство  $DVRPHZUQ$  есть параллелепипедъ (374), прмт.  $VPQZ$  діагональная его плоскость и прам.  $VRPZUQ =$  прам.  $VPDZQH$  (381). Но въ прид.  $VZBF$  прам.  $VXBZUF =$  прам.  $VBZFE$

и въ прид.  $BFPQ$  прзм.  $BSPFTQ =$  прам.  
 $EPGFQC$  (381); чего ради, по опущеніи сихъ  
 призмъ отъ первыхъ, останется прид.  $AECG$   
 $=$  прид.  $XYST$ . Поелику же въ треугольн.  $ABV$   
 и  $SBP$ ,  $AB:BS=AV:PS$  (205) и въ прмг-хъ  
 $AC$  и  $IL$ , равныхъ по положенію,  $AE:IK=$   
 $IM:BC$  (194); то будетъ  $AV (=BX) = IM$   
 (166), прмг.  $XS =$  прмг.  $IL$  (105),  $XT (=AE)$   
 $= IN$  (377) и прид.  $XYST =$  прид.  $INLO$  (386);  
 чего ради прид.  $AECG =$  прид.  $INLO$ .

При доказательствѣ сего предложенія  
 взяты прямоугольные параллелепипеды; но  
 въ ономъ заключается доказательство ра-  
 венства и всякаго вида параллелепипедовъ,  
 стоящихъ на равныхъ основаніяхъ и имѣ-  
 ющихъ равныя высоты; ибо сіи паралле-  
 лепеды всегда обращены быть могутъ въ  
 прямоугольные, имѣ равные (388).

390. Присовок. 1. Отсюда слѣдуетъ, что  
 трехсторонныя призмы, имѣющія равныя  
 основанія и высоты, величиною суть рав-  
 ны между собою (382 и 147).

391. Присовок. 2. Также слѣдуетъ, что  
 и всякія призмы, стоящія на равныхъ осно-  
 ваніяхъ и имѣющія равныя высоты, вели-  
 чиною суть равны между собою; ибо призмъ  
 сіи могутъ обращены быть въ трех-  
 сторонныя, стоящія на равныхъ основані-  
 яхъ и имѣющія равныя высоты. Въ семь  
 помощію III-го предложенія главы 5-й кни-  
 ги 1-й (141) и спроект, показаннаго въ слѣ-  
 дующемъ приспособленіи, всякой удостове-  
 ряться можетъ.

392. Присовок. 3. Наконецъ отсюда же  
 слѣдуетъ, что параллелепипедъ и всякая  
 призма по даннымъ основанію и высотѣ ве-

личною своею опредѣляющся; а когда при основаніи ихъ данъ еще будетъ толстый уголъ, то и видъ оныхъ опредѣлится; почему по симъ даннымъ всегда составились ихъ можно.

Черт. 148. Пусть, на примѣръ, для составленія призмы даны основ.  $ABCDE$ , выс.  $X$  и при основаніи т. уг.  $AEFB$ . Изъ какой нисешь точки  $A$  онаго основанія поставь на немъ перпендикуляръ  $AT = \text{выс. } X$  (322), чрезъ точку  $F$  проводи плоскость, параллельную ему основанію (341), продолжи до пресѣченія съ нею даннаго угла ребро  $AF$ , проводи до пресѣченія съ тою же плоскостію изъ вершинъ прочихъ угловъ основанія прямыя, оному ребру параллельныя,  $BC$ ,  $CH$ ,  $DI$  и  $EK$ , и представь проходящія чрезъ нихъ плоскости: чрезъ сіе и составились требуемая приз.  $ABCDEFGHNIK$ .

395. Предложеніе VI. Л. Въ данной трехсторонней пирамидѣ ( $ABCD$ ) описать сколько нисешь трехсторонныхъ призмъ, стоящихъ одна на другой и имѣющихъ равныя высоты, и также около нея описать столько же, съ одною, другихъ трехсторонныхъ призмъ, стоящихъ же одна на другой и имѣющихъ тѣже равныя высоты.

Черт. 135. Чрезъ вершину  $A$  данной пирамиды проводи (341) плоскость, параллельную ей основ.  $BCD$  и изъ точки  $B$  поставь къ оному перпендикуляръ  $BE$  (322), который равенъ будетъ высотѣ пирамиды (345); сію высоту  $BE$  раздѣли на сколько нисешь равныхъ частей  $BF$ ,  $FG$ ,  $GH$ ,  $HE$  (102); чрезъ точки дѣленія  $F$ ,  $G$ ,  $H$  проводи плоскости  $IKL$ ,  $MNO$ ,  $PQR$ , параллельныя же основ.  $BCD$  (341) до

пресѣченія съ сторонами пирамиды въ прямыхъ  $IK, KL, IL, MN, NO, MO, PQ, QR, PR$ ; попомъ, чрезъ точки  $K, L, N, O, Q, R$  проведи прямыя  $KS, LT, NU, OX, QF, RZ$ , прямыя  $AB$  (75), и прямыя  $ST, UX, TZ$ ; чрезъ что и будешь имѣть вписанныя въ пирамидѣ  $ABCD$  призмы  $ESTIKL, IUXMNO, MTZPQR$ , стоящія одна на другой и имѣющія равныя высоты  $BF, FC, GH$  (56 $\frac{1}{4}$ ).

Теперь проведи прямыя  $CG, DA$ , прямыя  $AB$ , до пресѣченія съ продолженными  $IK, IL$ , и продолживъ  $SK, TL, UN, XO, YQ, ZR$  до пресѣченія съ продолженными  $MN, MO, PQ, PR$ , и имъ параллельно протянутыми  $AW$  и  $AE$ , проведи прямыя  $GA, EA, WH, WZ$ ; чрезъ что и будешь имѣть описанныя около пирамиды  $ABCD$  призмы  $BCDIGA, IKLMGA, MNOPWH, PQRWZ$ , стоящія одна на другой и имѣющія шѣже равныя высоты  $BF, FG, GH, HE$  (56 $\frac{1}{4}$ ).

304. Присовок. Ошкѹда явствуетъ, что избытокъ описанныхъ около пирамиды  $ABCD$  призмъ  $BCDIGA, IKLMGA, MNOPWH, PQRWZ$ , вмѣстѣ взятыхъ, предъ вписанными въ той же пирамидѣ призмами  $ESTIKL, IUXMNO, MTZPQR$ , вмѣстѣ взятыми, равняется призмѣ  $BCDIGA$ , у которой основаніе  $BGD$  есть основаніе пирамиды, а высота  $BF$  одна изъ равныхъ частей, на кои раздѣлена высота оной.

Начи, что избытокъ описанныхъ призмъ предъ вписанными составляютъ призмы  $PQRWZ, TZONQRHV, UXLKNOAG, STDCKLGA$ , вмѣстѣ взятые; но призм.  $PQRWZ +$  призм.  $TZONQRHV =$  призм.  $MTZPQR +$  призм.  $TZONQRHV =$  призм.

$MNOPP$ , прзм.  $MNOPP$  + прзм.  $UXLKNO\Lambda\Theta$   
 = прзм.  $IUXMNO$  + прзм.  $UXLKNO\Lambda\Theta$  =  
 прзм.  $IKLM\Theta\Lambda$  и прзм.  $IKLM\Theta\Lambda$  + прзм.  
 $STDCKL\Delta I$  = прзм.  $BSTIKL$  + прзм.  $STDCKL\Delta I$   
 = прзм.  $BCKI\Gamma\Delta$ ; слѣдов. и проч.

395. Предложеніе VII. А. Избытокъ вли-  
 сь взятыхъ трехстороннихъ призмъ, опи-  
 сываемыхъ около трехсторонней пирамиды,  
 соотноственно раздѣленію на равныя части  
 ея высоты, увеличиваемому чрезъ разсѣченіе  
 каждой изъ сихъ частей пополамъ, предъ взя-  
 тыми влисть трехсторонними призмами,  
 подобно первыи въ той же пирамидѣ впи-  
 сываемыми, можетъ сдѣлаться меньше вся-  
 кой по произволению данной величины.

Избытокъ симъ образомъ описанныхъ  
 призмъ предъ вписанными равняется призмѣ,  
 у которой основаніе тоже самое, что  
 и у пирамиды, а высота одна изъ равныхъ  
 частей, на кои раздѣлена высота сей пира-  
 миды (394); посему чрезъ разсѣченіе каж-  
 дой изъ сихъ равныхъ частей пополамъ и  
 чрезъ соотноственное сему новому раздѣ-  
 ленію вписываніе и описываніе призмъ, по-  
 лучится избытокъ равный призмѣ, у кото-  
 рой основаніе будетъ тоже самое, что и у  
 прежней, а высота въ половину меньше; и  
 слѣдов. сей избытокъ уменьшится въ поло-  
 вину; но явно, что величина, такимъ обра-  
 зомъ уменьшающаяся, можетъ сдѣлаться  
 меньше всякой по произволению данной ве-  
 личины; слѣдов. и проч.

396. Присовокъ. Вписанныя въ пирамидѣ  
 призмы, вмѣстѣ валины, меньше ея, а опи-  
 санныя около ней, вмѣстѣ взятыя, больше  
 ея; почему избытокъ пирамиды предъ сово-

купною величиною вписываемыхъ въ ней призмъ, соответственно раздѣленію на равныя части ея высоты, или избытокъ совокупной величины такимъ же образомъ, описываемыхъ около пирамиды призмъ предъ сою самою пирамидою можетъ сдѣлаться и паче меньше всякой по произволению данной величины.

597. Предложеніе VIII. А. Трехсторонная пирамида есть предѣлъ совокупной величины призмъ, вписываемыхъ въ ней или около ея описываемыхъ, соответственно раздѣленію на равныя части ея высоты, увеличиваемому чрезъ разсѣченіе каждой изъ силъ частей пополамъ.

Совокупная величина симъ образомъ, вписываемыхъ въ пирамидъ или около ней описываемыхъ призмъ, увеличиваясь или уменьшаясь, никогда до пирамиды не достигаетъ, и сія пребываетъ непремѣнною; также избытокъ пирамиды предъ увеличивающеюся совокупною величиною вписываемыхъ въ ней призмъ, или избытокъ уменьшающеюся совокупной величины около ней описываемыхъ призмъ предъ самою пирамидою можетъ сдѣлаться меньше всякой по произволению данной величины (596); чего ради пирамида есть предѣлъ сей совокупной величины тѣхъ или другихъ призмъ (501).

598. Предложеніе IX. Трехсторонная пирамида (ABCD и EFGH), стоящая на равныхъ основаніяхъ (BCD и FGH) и имѣющая равныя высоты (BI и FK), величину свою равна между собою. Черт. 136.

Раздѣли высоты BI и FK на сколько угодно равнотныхъ равныхъ частей и въ

каждой изъ пирамидъ вписаннѣйшей соотвѣстствен-  
 ный сему раздѣленію призмы (593); пусть  
 $LPOMQN$  и  $RXUSTT$  будутъ одна изъ та-  
 ковыхъ призмъ соотвѣствующихъ равнове-  
 стнымъ  $ZA$  и  $VP$  высотъ  $BI$  и  $FK$ . Пло-  
 скости  $MQN$  и  $STT$ , по строенію, суть пра-  
 вы осей  $BCD$  и  $FGH$ ; посему треугольни-  
 ки сии суть подобны, каждый каждому (542,  
 550 и 203); почему треуг.  $BCD$ : треуг.  $MQN$   
 $=$  кдр.  $\overline{BC}$ : кдр.  $\overline{MQ}$  и треуг.  $FGH$ : треуг.  
 $STT =$  кдр.  $\overline{FG}$ : кдр.  $\overline{ST}$  (210). Но  $BC$ :  $MQ$   
 $(= AB: AM) = BI: IA$  и  $FG$ :  $ST (= EF: ES)$   
 $= FK: KP$  (179, 180 и 159), чего ради треуг.  
 $BCD$ : треуг.  $MQN =$  кдр.  $\overline{BI}$ : кдр.  $\overline{IA}$ , тре-  
 уг.  $FGH$ : треуг.  $STT =$  кдр.  $\overline{FK}$ : кдр.  $\overline{KP}$  (193  
 и 159) и треуг.  $MQN =$  треуг.  $STT$  (166);  
 или все тоже треуг.  $LPO =$  треуг.  $RXU$ . И  
 такъ призмы  $LPOMQN$  и  $RXUSTT$  суть  
 равны между собою (590). Подобнымъ обра-  
 зомъ докажется, что и всякая другая призма  
 изъ вписанныхъ въ пирамидъ  $ABCD$  рав-  
 на соотвѣстственной другой призмѣ изъ впи-  
 санныхъ въ пирамидъ  $EFGH$ ; посему сово-  
 купствъ величина всѣхъ призмъ вписанныхъ  
 въ пирамидъ  $ABCD$  равна совокупной вели-  
 чинѣ всѣхъ призмъ вписанныхъ въ пирами-  
 дъ  $EFGH$ . Слѣдов. пирамиды сии, какъ пре-  
 дѣлы вписываемыхъ въ нихъ призмъ (597);  
 суть равны между собою (503).

599. *Примечаніе.* Отсюда слѣдуетъ, что  
 и всякія пирамиды, имѣющія равныя осно-  
 ванія и равныя высоты, величиною суть  
 равны между собою; ибо пирамиды сии мо-  
 гутъ обращены быть въ трехстороннія,  
 стоящія на равныхъ основаніяхъ и имѣю-

нія равныя высоты. Въ семъ помощію III-го предложенія главы 5-й книги 1-й (141) и строенія, показаннаго въ слѣдующемъ присовокупленіи, всякой удостовѣриться можно.

400. *Присовок. 2.* Отсюда же слѣдуетъ, что всякая пирамида по основанію и высотѣ величиною своею опредѣляется; а когда при основаніи данъ еще будетъ полснныи уголъ, то и видъ оной опредѣлится; почему по симъ даннымъ всегда составится ее можно.

Пусть для составленія пирамиды даны основ.  $LMNO$ , выс.  $T$  и при основаніи т. уг.  $LOPM$ . На плоскости даннаго основанія изъ какой нибудь точки  $L$  пославъ перпендикуляръ  $LU = \text{выс. } T$  (322), проводи чрезъ точку  $U$  плоскость, параллельную оному основанію, продолжи до пресѣченія съ нею даннаго полсннато угла ребро  $LP$  и проводи въ вершинѣ прочихъ угловъ основанія прямыя  $PM$ ,  $PN$  и  $PO$ ; чрезъ что и составится требуемая прд.  $PLMNO$ . Черт. 148.

401. *Предложеніе. X. С.* Всякая трехсторонняя призма ( $ABCDF$ ) раздѣлена быть можетъ на три трехстороннія пирамиды, между собою равныя. Черт. 137.

Проведи діагонали  $AE$ ,  $CE$  и  $CD$ ; усмотришь, что пирамиды  $EACD$  и  $EFCD$  имѣютъ общую вершину  $E$  и стоятъ на равныхъ треугол.  $ACD$  и  $FCD$  (95); а пирамиды  $EACD$  и  $EABC$  имѣютъ общую вершину  $C$  и стоятъ на равныхъ треугол.  $ADE$  и  $ABE$  (95); чего ради прд.  $EACD$  равна каждой изъ пирамидъ  $EFCD$  и  $EABC$  (398). И такъ всѣ три пирамиды  $EACD$ ,  $EFCD$  и  $EABC$  суть равны между собою; слѣдов. и проч.

402. *Присовок.* Откуда слѣдуетъ, что всякая пирамида, имѣющая съ призмой равное основаніе и равную высоту, есть третья часть сей призмы.

Черт. 138. 403. *Предложеніе XI. С.* Усѣченная трех-сторонняя пирамида ( $ABCDEF$ ) можетъ быть раздѣлена на три цѣлыя пирамиды: 1) на пирамиду, стоящую на нижнемъ основаніи ( $ABC$ ) и имѣющую ту же высоту, что и усѣченная; 2) на пирамиду, стоящую на верхнемъ основаніи ( $DEF$ ) и имѣющую ту же высоту; и наконецъ 3) на пирамиду, равную столицей на основаніи, среднимъ пропорціональнымъ между нижнимъ и верхнимъ, и имѣющей ту же высоту, что и первая.

Проведи діагонали  $AE$ ,  $CE$  и  $CD$ ; потомъ проводи  $CG$  параллельную  $AD$  (75) до пересѣченія съ продолженною  $DF$  и прямую  $EG$ ; получивъ тг.  $ACGD$  (92), въ коемъ  $AC = DG$  (94); почему проведши въ треуг-хъ  $ABC$  и  $DEG$  высоты ихъ  $BH$  и  $EI$ , усмотришь, что треуг.  $ABC$ : треуг.  $DEG = BH:EI$  (192); но треуг-ки  $ABC$  и  $DEF$  суть подобны (530 и 203) и потому  $AC:DF (=AB:DE) = BH:EI$  (203 и 159); чего ради треуг.  $ABC$ : треуг.  $DEG = DG (=AC):DF$  (159); и какъ треуг.  $DEG$ : треуг.  $DEF = DG:DF$  (192), то явствуетъ, что треуг.  $ABC$ : треуг.  $DEG =$  треуг.  $DEG$ : треуг.  $DEF$  (159) и слѣдов. треуг.  $DEG$  есть средній пропорціональный между треуг-ми  $ABC$  и  $DEF$ . И такъ пирамиды  $EACD$  и  $ECDE$  имѣютъ общую вершину  $E$  и стоятъ на равныхъ треуг-хъ  $ACD$  и  $CDG$  (95); посему прд.  $EACD =$  прд.  $ECDE$  (596), стоящей на треуг.  $DEG$  среднимъ пропорціональнымъ между основаніями усѣчен-

ной пирамиды и имѣющей ту же высоту, что и сія усѣченная. Но сія усѣченная пирамида, сверхъ пирамиды  $EACD$ , заключаетъ въ себѣ еще двѣ пирамиды  $EABC$  и  $CDEF$ , изъ коихъ первая сновить на нижнемъ основаніи  $ABC$ , а другая на верхнемъ  $DEF$ , и обѣ имѣють ту же высоту, что и усѣченная; чего ради предложеніе сіе явствуетъ.

404. *Присовок.* Отсюда слѣдуетъ, что всякая усѣченная пирамида равна цѣлой, у коей основаніе равняется вмѣстѣ взятымъ нижнему и верхнему основаніямъ усѣченной пирамиды, съ площадью среднею пропорціональною между ими, а высота та же, что и у сей усѣченной пирамиды.



## КНИГИ ТРЕТЬЕЙ ГЛАВА V.

### О многогранникахъ вообще.



405. *Опредѣленіе I.* Если какіе ни есть многоугольники, находящіеся въ разныхъ плоскостяхъ, равными сторонами своими взаимно прикасаются такъ, что ими заключается опредѣленное пространство: то оно вообще *многогранникомъ* называется; и каждый изъ сихъ многоугольниковъ по разнѣ *гранью*, а всѣ вмѣстѣ *поверхностію* его именуются; каждая же изъ прямыхъ, въ коихъ многоугольники взаимно прикасаются, *ребромъ* многогранника называется.

406. *Присовок.* Многогранники различаются по числу граней, ихъ содержащихъ;

по сему трехсторонняя пирамида, содержащая четыре треугольниками, будетъ, первый и простѣйшій видъ многогранниковъ; четырехсторонняя пирамида и трехсторонняя призма составятъ второй видъ многогранниковъ; пятисторонняя пирамида и четырехсторонняя призма, въ особенности же параллелепипедъ, составятъ третій видъ многогранниковъ, и такъ далѣе. Слѣдов. извѣснаго числа сторонъ многогранники можемъ называть *четырегранныками*, *пятигранныками*, *шестигранныками*, и такъ далѣе.

407. *Опредѣленіе П.* Многогранникъ, въ коемъ всѣ грани суть совершенно равныя правильныя многоугольники и толстые углы, содержимые углами сихъ многоугольниковъ, также суть всѣ совершенно равныя, называется *правильнымъ*; всякой же иной *неправильнымъ*.

*Примѣч.* Плоскіе углы, содержащіе толстый уголъ, вмѣстѣ взятые, всегда меньше четырехъ прямыхъ (355); по сему для составленія правильныхъ многогранниковъ не многіе изъ правильныхъ многоугольниковъ употреблены быть могутъ. Какіе же именно правильныя многоугольники къ сему удобны и сколько изъ нихъ правильныхъ многогранниковъ произойти можетъ, сіе извѣствуемъ изъ слѣдующаго предложенія:

408. *Предложеніе I.* Правильныя многогранники состоятъ могутъ только изъ правильныхъ или равностороннихъ треугольниковъ, правильныхъ четырехугольниковъ или квадратовъ и наконецъ изъ правильныхъ шес-

триугольниковъ; всѣхъ же ихъ не болѣе быть можетъ, какъ только пять.

1.) Пусть грани будутъ правильные или равносторонние треугольники. Толстый уголъ многогранника состоятъ можетъ только изъ трехъ угловъ сихъ треугольниковъ, или изъ четырехъ или наконецъ изъ пяти (355), ибо шесть угловъ оныхъ составляютъ уже 4 прямыхъ (84); посему изъ равностороннихъ треугольниковъ только три правильные многогранника могутъ быть, кои суть: тетраэдръ или правильный четырехгранникъ, октаэдръ или правильный осмигранникъ и икосаэдръ или правильный двадцатигранникъ.

2.) Пусть грани будутъ правильные четырехугольники или квадраты. Толстый уголъ многогранника состоятъ можетъ только изъ трехъ угловъ сихъ квадратовъ (355), ибо четыре угла оныхъ составляютъ уже 4 прямыхъ (98); посему изъ квадратовъ или правильныхъ четырехугольниковъ только одинъ правильный многогранникъ можетъ быть, который есть гексаэдръ или правильный шестигранникъ.

3.) Наконецъ, пусть грани будутъ правильные пятиугольники. Толстый уголъ многогранника состоятъ можетъ только изъ трехъ угловъ сихъ пятиугольниковъ (355), ибо четыре оныхъ угла составляютъ уже болѣе 4 прямыхъ (138); посему изъ правильныхъ пятиугольниковъ также только одинъ правильный многогранникъ быть можетъ, который есть додекаэдръ или правильный двадцатигранникъ.

Болѣе же сихъ правильныхъ многогранниковъ быть не можетъ; ибо при угла правильныхъ шестигульниковъ составляютъ 4 прямыхъ, а при угла прочихъ правильныхъ многоугольниковъ составляютъ всегда болѣе 4 прямыхъ (138).

Откуда происходятъ слѣдующія опредѣленія:

Черт. 139. 409. *Опредѣленіе III.* Правильный многогранникъ, содержаемый четырьмя равносторонними треугольниками, называется *тетраэдромъ* или *правильнымъ четырехгранникомъ*.

Черт. 140. 410. *Опредѣленіе IV.* Правильный многогранникъ, содержаемый осью равносторонними треугольниками, называется *октаэдромъ* или *правильнымъ восьмигранникомъ*.

Черт. 141. 411. *Опредѣленіе V.* Правильный многогранникъ, содержаемый двадцатью равносторонними треугольниками, называется *икосаэдромъ* или *правильнымъ двадцатигранникомъ*.

Черт. 146. 412. *Опредѣленіе VI.* Гексаэдръ или правильный шестигранникъ есть не иное что, какъ кубъ. (530).

Черт. 142. 413. *Опредѣленіе VII.* Правильный многогранникъ, содержаемый двѣнадцатью правильными пятиугольниками, называется *додекаэдромъ* или *правильнымъ двѣнадцатигранникомъ*.

414. *Предложеніе II.* Всякой многогранникъ раздѣленъ быть можетъ на пирамиды, имѣющія вершины свои въ вершинѣ одного изъ реберъ его угловъ, а основаниями тѣ грани многогранника, которыя не содержатъ сего ребра угла; притомъ на столько пи-

пирамидъ, сколько у многогранника граней безъ  
тѣхъ, кои содержатъ тотъ толстый уголъ.

Пусть  $A$  вершина какого нибудь одно- Черт. 151,  
го изъ толстыхъ угловъ  $ABED$ , содержаща-  
го гранями  $ABCD$ ,  $ABFE$  и  $AEND$  данного  
многогранника  $ABCDEFGH$ , и  $BCCF$ ,  $FCHE$   
и  $HDCC$  другія его грани; проводи изъ сей  
вершины  $A$  въ вершины  $C$ ,  $F$ ,  $G$  и  $H$  всѣхъ  
прочихъ толстыхъ угловъ, кои не суть  
при ребрахъ толстаго угла  $ABED$ , прямыя  
 $AC$ ,  $AF$ ,  $AG$  и  $AH$ .

1.) Онь сего, какъ то явно, въ много-  
гранникъ составяшся пирамиды  $ABCCF$ ,  
 $AFCH$  и  $ACGH$  ( $360$ ), имѣющія вершины  
свои въ вершинѣ  $A$  толстаго угла  $ABED$ , а  
основаніями грани  $BCCF$ ,  $FCHE$  и  $HDCC$  то-  
го многогранника; почему первая часть пре-  
дложенія явствуетъ.

2.) Также явно, что тѣ покло грани  
даннаго многогранника могутъ быть осно-  
ваніями пирамидъ, имѣющихъ вершины свои  
въ вершинѣ  $A$  толстаго угла  $ABED$ , кои не  
содержатъ сего толстаго угла; почему и  
вторая часть предложенія явствуетъ.

415. *Присовокъ.* Изъ чего слѣдуетъ, что  
многогранники, имѣющіе равномогιά грани  
и ребра, суть совершенно равны между со-  
бою, когда они состоятъ изъ равномогихъ  
совершенно равныхъ и подобно расположен-  
ныхъ пирамидъ.

Впрочемъ равенство таковыхъ много-  
гранниковъ можно доказать непосредствен-  
но чрезъ наложеніе ( $370$ ) (\*).

(\*) Г. Лежандръ въ Примѣчаніяхъ къ своимъ  
Основаніямъ Геометріи (стр. 276) говоритъ:

## КНИГИ ТРЕТЬЕЙ ГЛАВА VI.

О приложеніи теоріи величинъ пропорціональныхъ къ тѣламъ.



416. Предложеніе I. Л. Если параллельныя плоскости (АЕСС) и лежащая при ея основаніяхъ ребра (АВ, DC, EF и HG) разсѣкутъ

„Весьма нужно раздѣлять въ тѣлахъ и кривыхъ поверхностейъ два рода равенства, кои сами по себѣ суть различны. Въ самомъ дѣлѣ два тѣла, два толстые угла, два сферическіе треугольника, или многоугольника могутъ быть равны во всѣхъ частяхъ, ихъ составляющихъ; но не могутъ совмѣститься чрезъ наложеніе.“ Почему, называя равенство сіе равенствомъ по симметріи и призывъ оное въ своихъ Основаніяхъ какъ начало, приложивъ его къ толстымъ угламъ, многогранникамъ и сферическимъ треугольникамъ. Разсмотримъ сіи предложенія.

Г. Лежандръ симметрическими многогранниками (кн. IV-й опред. 16) называетъ два многогранника, имѣющіе одинъ по одну сторону общаго ихъ основанія, а другой по другую составлены подобно и притомъ такъ, что вершины сходственныхъ толстыхъ угловъ ихъ находятся въ равномъ разстояніи отъ плоскости основанія на прямой линіи, къ той плоскости перпендикулярной. Приложивъ сіе опредѣленіе къ извѣстнымъ тремъ родамъ многогранниковъ, то есть, къ пирамидамъ, призмамъ и вообще многогранникамъ, содержаемымъ какимъ нибудь числомъ прямолинейныхъ многоугольниковъ, всякой усмотритъ, что въ первыхъ двухъ случаяхъ симметрическіе многогранники будутъ не что иное,

ся, едѣ внести, плоскостію ( $IKLM$ ), параллельною тѣмъ боковымъ сторонамъ его ( $ADHE$  и  $BCCF$ ), которыя оными ребрами сопряга-

какъ обыкновенныя пирамиды и призмы, стоящія на томъ же основаніи и имѣющія равныя высоты; почему равенство оныхъ докажетъ точно такъ, какъ сихъ послѣднихъ. Приложимъ теперь тоже опредѣленіе къ претъему роду многогранниковъ и возьмемъ для сего два симметрическіе многогранники, содержимые какимъ внести числомъ прямолинейныхъ многоугольниковъ. Изъ вершинъ сходственныхъ толстыхъ угловъ раздѣливъ сіи многогранники на пирамиды, найдемъ, что въ каждомъ изъ нихъ будетъ равное число подобно расположенныхъ пирамидъ и что одиъ изъ сихъ будетъ или симметрическія же, или стоящія на равныхъ основаніяхъ и имѣющія равныя высоты; почему о равенствѣ претъаго рода симметрическихъ многогранниковъ также можемъ заключить безъ помощи предначертаннаго опредѣленія оныхъ. И такъ при изслѣдованіи случаевъ равенства многогранниковъ можемъ обойтись безъ симметріи и слѣдов. безъ введенія оной для сего въ Основанія Геометріи.

Чтожъ касается до приложенія симметріи къ толстымъ угламъ и сферическимъ треугольникамъ: то понятіе о ней хотя и нельзя, по отношенію къ симъ предметамъ, назвать излишнимъ; но такъ какъ теорія равенства толстыхъ угловъ сама по себѣ ни къ какимъ достопримѣчательнымъ случаямъ не ведетъ и нужна только для многогранниковъ; а теорія сферическихъ треугольниковъ, какъ - то замѣчаетъ Г. Гурьевъ (Оп. о усов. Елем. Геом. стр. 198 и 199), къ Основаніямъ Геометріи не принадлежитъ: ибо въ свойствѣ ихъ никакихъ свойствъ, относящихся собственно къ шару или его поверхности, не слѣдуетъ и произвести невозможно; при томъ

ются: то параллелизмъ сей такъ будетъ относиться къ одному изъ своихъ отсѣковъ ( $AEKL$ ), какъ одинъ изъ тѣхъ ребръ ( $AB$ ) относится къ своему отсѣку ( $AI$ ).

Ребро  $AB$  съ своимъ отсѣкомъ  $AI$  или имѣють общую мѣру, или не имѣють.

№ 1.

1.) Пусть ребро  $AB$  съ отсѣкомъ  $AI$  имѣють общую мѣрою величину  $AN$ . Черезъ точку  $N$  проведи плоскость  $NOPQ$  параллельную  $ADHE$  (341); заключишь, что сколько ребро  $AB$  есть кратнаго ребра  $AN$ , столько же и прил.  $AECG$  есть кратнаго прил.  $AEOP$ , и сколько ребро  $AN$  есть частию отсѣка  $AI$ , столько же и прил.  $AEOP$  есть частию прил.  $AEKL$  (385 и 146). И такъ прил.  $AEOP$  прил.  $AEKL$  и ребро  $AN$  отсѣка  $AI$  суть равночастныя; а прил.  $AECG$  и ребро  $AB$  сихъ равночастныхъ равнократны; слѣдов. прил.  $AECG$ : прил.  $AEKL$  =  $AB$ :  $AI$  (151).

№ 2.

2.) Пусть ребро  $AB$  съ отсѣкомъ  $AI$  общей мѣры не имѣють. Возьми отсѣка  $AI$  какую нибудь частную величину  $AN$  (102)

если дозволить помѣщеніе сей теоріи въ Основанія Геометріи, то по всякому праву должно помѣстить въ оныя и коническія сѣченія и всю теорію кривыхъ линій; но тогда выдутъ не Основанія, а собраніе различныхъ теорій; чего ради рѣшительно можемъ сказать, что *симметріа* для первоначальной Геометріи есть предметъ совершенно посторонній, и потому введеніе оной, а особенно какъ начала, въ Основанія Геометріи допущено быть не должно. Въ исцѣпѣ сего убѣждаетъ насъ также то, что наука, чѣмъ менѣе имѣетъ началъ, тѣмъ доказательствъ ея должны быть проще и естественнѣе.

и по сей частной приближенной  $AR$  и  $AS$  (150) ребра  $AB$ ; чрезъ точки  $N$ ,  $R$  и  $S$  проведемъ плоскости  $NORQ$ ,  $RXZT$  и  $STVU$  параллельныя  $ADHE$ ; заключимъ, что прид.  $AEOR$  при-да  $AEKL$  и ребро  $AN$  отсѣка  $AI$  суть равночастны, а при-ды  $AEXZ$  и  $AETV$ , приближенные при-да  $AECG$ , и  $AR$  и  $AS$ , приближенные ребра  $AB$ , сихъ равночастныхъ равнократны (585 и 146); слѣдов. прид.  $AECG$ : прид.  $AEKL = AB:AI$  (151).

417. Присовок. г. Откуда слѣдуетъ, что отсѣки  $AEKL$  и  $IMCG$  параллелепипеда  $AECG$  относятся между собою, какъ отсѣки  $AI$  и  $IB$  ребра  $AB$ .

Пропорція прид.  $AECG$ : прид.  $AEKL = AB:AI$  даетъ сію: прид.  $AEKL$ : прид.  $AECG$  — прид.  $AEKL = AI:AB - AI$  (170 и 161); но прид.  $AECG$  — прид.  $AEKL =$  прид.  $IMCG$  и  $AB - AI = IB$ ; слѣдов. и проч.

418. Присовок. я. Отсюда же слѣдуетъ, что прид.  $AECG$  къ своему отсѣку  $AEKL$  такъ относится, какъ основ.  $AC$  къ своему отсѣку  $AK$ , и что отсѣки  $AEKL$  и  $IMCG$  при-да  $AECG$  суть между собою, какъ отсѣки  $AK$  и  $IC$  основанія  $AC$ .

Пгр.  $AC$ : пгр.  $AK = AB:AI$  и пгр.  $AK$ : пгр.  $IC = AI:IB$  (189 и 190); посему утверждаемое явствуетъ (416, 417 и 159).

419. Предложеніе II. Параллелепипеды ( $AECG$  и  $INLP$ ), имѣющіе равныя высоты (Черт. 114. ( $AR$  и  $IS$ ), такъ относятся между собою, какъ основанія ( $AC$  и  $IL$ ), или стоящіе на равныхъ основаніяхъ ( $AC$  и  $IL$ ), какъ высоты ( $AR$  и  $IS$ ).

1) По высотѣ и углу  $BAD$  большаго № 1. основ.  $AC$  составь пгр.  $ATUD =$  меньшему

основ.  $IL$  (197) и чрезъ точку  $T$  проведи плоскость  $TUXY$ , прл-ную  $BCGF$  (341); най-деши, что прлд.  $AECG$ : прлд.  $AEUX$  = основ.  $AC$ : основ.  $AU$  (418) и прлд.  $AECG$ : прлд.  $INLP$  = основ.  $AC$ : основ.  $IL$ ; ибо прлд.  $AEUX$  = прлд.  $IMLP$  (389).

№ 2.

2) Отъ большей выс.  $AR$  возми часть  $AT$  = меньшей выс.  $IS$  (102) и чрезъ точку  $T$  проведи плоскость  $TUXYZ$ , прл-ную основ.  $AC$  (341) до пресѣченія съ сторонами прл-да  $AECG$ ; получимъ прлд.  $AUCY$  = прлд.  $INLP$  (389). Но прлд.  $AECG$ : прлд.  $AUCY$  =  $AE:AU$  (416) и  $AE:AU$  =  $AR:AT$  (179); чего ради прлд.  $AECG$ : прлд.  $INLP$  =  $AR:IS$  (159).

420. Присовок. 1. Откуда слѣдуетъ, что призмы и пирамиды, имѣющія равныя высоты, относятся между собою, какъ основанія, или стоящія на равныхъ основаніяхъ, какъ высоты (382, 391, 402 и 160).

421. Присовок. 2. Отсюда же слѣдуетъ, что ежели четыре линіи пропорціональны: то кубы, имѣющіе ихъ своими ребрами, суть также пропорціональны.

Пусть дана пропорція  $A:B=C:D$ ; будешь куб.  $\overline{A}$ : прлд. кдр.  $\overline{B}$ ,  $\overline{A} =$  куб.  $\overline{C}$ : прлд. кдр.  $\overline{D}$ ,  $C$  и прлд. кдр.  $\overline{A}$ ,  $B$ : куб.  $\overline{B} =$  прлд. куб.  $\overline{C}$ ,  $D$ : куб.  $\overline{D}$  (419, 193 и 159). Но прлд. кдр.  $\overline{B}$ ,  $A$ : прлд. кдр.  $\overline{A}$ ,  $B =$  прлд. кдр.  $\overline{D}$ ,  $C$ : прлд. кдр.  $\overline{C}$ ,  $D$  (419 и 159); чего ради куб.  $\overline{A}$ : куб.  $\overline{B} =$  куб.  $\overline{C}$ : куб.  $\overline{D}$  (175).

422. Предложеніе III. Параллелепипеды Черт. 145. ( $AECG$  и  $INLP$ ), у коихъ основанія ( $AC$  и  $IL$ ) съ высотами ( $AR$  и  $IS$ ) въ обратномъ поряд-

къ составляютъ пропорцію (основ.  $AC$ : основ.  $IL$  = выс.  $IS$ : выс.  $AR$ ), суть равны между собою. И обратно: у разныхъ параллелепипедовъ ( $AECG$  и  $INLP$ ) основанія ( $AC$  и  $IL$ ) съ высотами ( $AR$  и  $IS$ ) въ обратномъ порядкѣ составляютъ пропорцію.

1) Составь прямой призм.  $TUXY$ , стоящій на основ.  $TX$  = основ.  $IL$  одного призм.  $INLP$  и имѣющій выс.  $TU$  = выс.  $AR$  другаго призм.  $AECG$  (385); будетъ призм.  $AECG$ : призм.  $TUXY$  = основ.  $AC$ : основ.  $TX$  (=  $IL$ ) и призм.  $INLP$ : призм.  $TUXY$  = выс.  $IS$ : выс.  $TU$  (=  $AR$ ) (419); но по положенію основ.  $AC$ : основ.  $IL$  = выс.  $AR$ : выс.  $IS$ ; чего ради призм.  $AECG$ : призм.  $TUXY$  = призм.  $INLP$ : призм.  $TUXY$  (159); и слѣдов. призм.  $AECG$  = призм.  $INLP$  (165).

2) Пусть призм.  $AECG$  = призм.  $INLP$ ; сдѣлавъ тоже строеніе, что и въ первомъ случаѣ, будешь имѣть пропорцію призм.  $AECG$ : призм.  $TUXY$  = основ.  $AC$ : основ.  $TX$  (=  $IL$ ); но призм.  $INLP$ : призм.  $TUXY$  = выс.  $IS$ : выс.  $TU$  (=  $AR$ ) (419); чего ради, поелику призм.  $AECG$  = призм.  $INLP$  по положенію, будешь основ.  $AC$ : основ.  $IL$  = выс.  $IS$ : выс.  $AR$  (159).

423. *Примечок.* 1. Откуда слѣдуетъ, что ежели три прямыя  $A$ ,  $B$  и  $C$  суть непрерывно пропорціональнымъ: то прямоугольный параллелепипедъ изъ сихъ прямыхъ равенъ кубу изъ средней. Черт. 146

Составь призм. чый призм.  $DGHI$ , имѣющій соприкосновеніями ребра  $DE$  =  $A$ ,  $DF$  =  $B$  и  $DG$  =  $C$ , и кубъ  $KNOP$ , у коего ребро  $KL$  =  $B$  (385); усмотришь, что основ.  $DH$ : основ.  $KO$  (=  $DE$ :  $KL$ ) =  $A$ :  $B$  (191); но  $A$ :  $B$  =  $B$ :  $C$  по положенію и выс.  $KN$  =  $B$ , а выс.  $DG$  =  $C$  по строенію; чего ради основ.  $DH$ : основ.  $KO$  = выс.  $KN$ : выс.  $DG$  (159) и призм.  $DGHI$  = куб.  $KNOP$  (422).

424. Присовок. 2. Отсюда же слѣдуетъ, что ес-  
Черт. 147. ли четыре прамы  $A, B, C$  и  $D$  суть непрерывно  
пропорціональны: то прямоугольный параллелепи-  
педъ, стоящій на квадратѣ изъ первой  $A$  и имѣю-  
щій высоту послѣднюю  $D$ , равенъ кубу изъ пер-  
вой средней  $B$ .

Пусть таковыя прамг-ный прд.  $ENIK$  и куб.  
 $LORQ$ . Составь прамг-ный прд.  $RUXY$ , имѣющій  
соприкосновенныя ребра  $RS = A$ ,  $RT = B$  и  $RU = C$   
(385); найдемъ, что осн.  $EI$ : осн.  $RX = A : B$  (191);  
и какъ  $A : B = B : C = C : D$  по положенію, то бу-  
демъ осн.  $EI$ : осн.  $RX (= C : D) =$  выс.  $RU$ : выс.  
 $EN$  (159); ибо выс.  $RU = C$  и выс.  $EN = D$  по стро-  
енію; чего ради прд.  $ENIK =$  прд.  $RUXY$  (422);  
но прд.  $RUXY =$  куб.  $LORQ$  (423); слѣдов. и прд.  
 $ENIK =$  куб.  $LORQ$ .

425. Присовок. 3. Тоже самое, что въ  
семъ предложеніи сказано о параллелепипе-  
дахъ, надлежитъ разумѣть о призмахъ и пи-  
рамидахъ (382, 391 и 402).

426. Предложеніе IV. Данную призму  
Черт. 148.  $(ABCDEFGH IK)$  или пирамиду  $(FABCDE)$  об-  
разитъ въ другую, которая бы имѣла данное  
основаніе  $(LMNO)$  или данную высоту  $(LU)$   
и данный при основаніи толстый уголъ  $(LORM)$ .

1) Въ данной призмѣ  $ABCDEFGH IK$  или  
пирамидѣ  $FABCDE$  проводи высоту  $AT$ , опре-  
дѣли двѣ прамы  $X$  и  $Y$ , которыя бы такъ  
относились между собою, какъ относятся  
основ.  $ABCD$  къ основ.  $LMNO$  (260), и по  
тремъ прамымъ  $Y, X$  и  $AT$  сыщи четвер-  
тую пропорціональную  $LU$  (185); потомъ  
на одномъ основаніи  $LMNO$  по сей  $LU$ , какъ  
высотѣ, и данномъ при томъ основаніи  
толстому углу  $LORM$ , составь призму  
 $LMNOPQRS$  или пирамиду  $PLMNO$  (392 и

406); чрезъ что и получишь требуемую призм.  $LMNOPQRS$  или прд.  $PLMNO$  (425).

2) Въ данной призмѣ  $ABCDEFGHIK$  или пирамидѣ  $FABCDE$  проведши высоту  $AT$ , составивъ многоуг.  $LMNO$ , который бы подобенъ былъ какому внесешь данному многоуг.  $F$ , и такъ отнеслся къ основ.  $ABCDE$  данной призмы или пирамиды, какъ отнесишься оной выс.  $AT$  къ данной выс.  $LU$  (214 и 215); потомъ поступи, какъ въ первой части сего предложенія поступлено было, и будешь имѣть требуемую призм.  $LMNOPQRS$  или прд.  $PLMNO$  (425).

427. Присовок. 1. Подобно призмамъ и пирамидамъ можетъ обращенъ быть и всякой параллелепипедъ въ другой, которой бы имѣлъ данное основаніе, или данную высоту и данной при основаніи толстый уголъ; ибо всякой параллелепипедъ не что иное есть, какъ четырехсторонная призма (364 и 377).

428. Присовок. 2. Отсюда имѣемъ средство всякой многогранникъ обратить въ пирамиду, призму и параллелепипедъ (414; 426, 492 и 392).



## КНИГИ ТРЕТЬЕЙ ГЛАВА VII.

### О подобіи многогранниковъ.



429. Опредѣленіе I. Многогранники называются подобными, когда имѣютъ грани

равноугольн, и сіи грани въ одномъ многогранникѣ дѣлають толстые углы равные толстымъ угламъ въ другомъ, каждый каждому, и сами суть одні другимъ подобны, каждая каждой.

Черт. 149. 430. Предложеніе I. Если въ имѣющихъ  
 равноугольн стороны пирамидахъ ( $ABCDEF$  и  $GHIKLM$ ) основаніе ( $BCDEF$ ) одной подобно основанію ( $HIKLM$ ) другой, и двѣ стороны сряду ( $ABF$  и  $ABC$ ) одной подобны двумъ сторонамъ сряду ( $GHI$  и  $GH$ ) другой, каждая каждой, или все тоже, вѣсто сторонъ, одинокъ толстый уголъ ( $BACF$ ) при основаніи одной равенъ одному толстому углу ( $HGIM$ ) при основаніи другой, и ребра ихъ простирающіяся къ вершинамъ пропорціональны однімъ изъ реберъ лежащихъ при основаніяхъ ( $AB:GH=BC:HI$ ): то пирамиды сіи суть подобны.

Въ прд-хъ  $ABCDEF$  и  $GHIKLM$  основ.  $BCDEF$  подобно основ.  $HIKLM$ , т. уг.  $BACF =$  т. уг.  $HGIM$  и  $AB:GH=BC:HI$  по положенію; то уг.  $BCD =$  уг.  $HIK$  (201); накл. плоск-ей  $ABC$ ,  $BCDEF =$  накл. плоск-ей  $GHI$ ,  $HIKLM$  (351) и уг.  $ACB =$  уг.  $GHI$  (206); почему т. уг.  $CABD =$  т. уг.  $IGHK$  (349) и  $AC:GI (=BC:HI)=CD:IK$  (201 и 159). Также докажется равенство прочихъ толстыхъ угловъ, находящихся при основаніяхъ, и пропорціональность ихъ реберъ; чего ради сходивенныя стороны пирамидъ будутъ подобны, каждая каждой (201); толстые углы при вершинахъ  $A$  и  $G$  равны между собою (358) и самыя пирамиды  $ABCDEF$  и  $GHIKLM$  подобны (429).

431. *Присовок.* Отсюда имѣемъ средство по данному ребру  $P$  при вершинѣ, или по данному ребру  $Q$  при основаніи составить пирамиду, подобную данной  $ABCDEP$ . Черт. 149

1) Пусть ребро  $P$  въ составляемой пирамидѣ должно соотвѣтствовать ребру  $AB$  данной. По тремъ прямымъ  $AB$ ,  $P$  и  $BC$  сыщи четвертую пропорціональную  $Q$  (185) и на прямой  $HI=Q$  составь многоуг.  $HIKLM$  подобный многоуг.-ку  $BCDEF$  (208); потомъ въ плоскости оного при прямой  $HI$  и точкѣ  $H$  составь т. уг.  $HGIM =$  т. уг.  $BACF$  (357) и взявъ  $HG = P$ , проводи прямыя  $GI$ ,  $GK$ ,  $GL$  и  $GM$ ; чрезъ что и будешь имѣть требуемую прд.  $GHIKLM$  (430).

2) Пусть ребро  $Q$  въ составляемой пирамидѣ должно соотвѣтствовать ребру  $BC$  данной. На прямой  $HI=Q$  составь многоуг.  $HIKLM$  подобный многоуг.-ку  $BCDEF$  (208) и въ ономъ при прямой  $HI$  и точкѣ  $H$  составь т. уг.  $HGIM =$  т. уг.  $BACF$  (357); потомъ къ прямымъ  $BC$ ,  $HI$  и  $AB$  сыщи четвертую пропорціональную  $P$  (185) и взявъ  $HG = P$  проводи прямыя  $GI$ ,  $GK$ ,  $GL$  и  $GM$ ; чрезъ что и будешь имѣть требуемую прд.  $GHIKLM$  (430).

432. *Предложеніе II.* Ежели въ илѣющихъ равномногои стороны призмахъ ( $ABCDEFGH$  и  $IKLMNOPQ$ ) основаніе ( $ABCD$ ) одной подобно основанію ( $IKLM$ ) другой, и двѣ стороны сряду ( $ADHE$  и  $ABFE$ ) одной подобны двумъ сторонамъ сряду ( $IMQN$  и  $IKON$ ) другой, каждая каждой, или все тоже, влѣсто сторонъ, одинъ толстый уголъ ( $AEBD$ ) при нижнемъ основаніи одной равенъ одному толстому углу ( $INKM$ ) при нижнемъ основаніи другой, и ребра ихъ, простирающіеся къ вершинамъ основаній пропорціональны однимъ изъ реберъ, лежащихъ при нижнихъ основаніяхъ ( $AE:IN=AB:IK$ ); то призмы сіи суть подобны.

Въ призм-хъ  $ABCDEFGH$  и  $IKLMNOPQ$  основ.  $ABCD$  подобно основ.  $IKLM$ , т. уг.  $ABDE =$  т. уг.  $IKMN$  и  $AE: IN = AB: IK$  по положенію; по уг.  $ABF =$  уг.  $IKO$  (201), накл. плоск-ей  $ABFE$ ,  $ABCD =$  накл. плоск-ей  $IKON$ ,  $IKLM$  (351) и уг.  $ABC =$  уг.  $IKL$  (201); почему т. уг.  $BCAF =$  т. уг.  $KLIO$  (349) и  $BF: KO (= AB: IK) = BC: KL$  (201 и 159). Также добавится равенство прочих толстых угловъ, находящихся при нижнихъ основаніяхъ, и пропорціональность ихъ реберъ: чего ради сходственные стороны призмъ будутъ подобны, каждая каждой (201); толстые углы при верхнихъ основаніяхъ равны между собою, каждый каждому (351) и самыя призмъ  $ABCDEFGH$  и  $IKLMNOPQ$  подобны (428).

433. *Присовок.* Отсюда имѣемъ средство по Черт. 150. данному боковому ребру  $S$  или по данному ребру  $T$  при основаніи составить призмъ, подобную данной  $ABCDEFGH$ .

1) Пусть ребро  $S$  въ составляемой призмѣ должно соответствовать ребру  $AE$  данной. По трѣмъ прямымъ  $AE$ ,  $S$  и  $AB$  сыщи четвертую пропорціональную  $T$  (185) и на прямой  $IK = T$  составь многоуг.  $IKLM$  подобный многоуг-ку  $ABCD$  (208); потомъ въ плоскости онаго при прямой  $IK$  и точкѣ  $I$  составь т. уг.  $INKM =$  т. уг.  $AEBD$  (357) и, взявъ  $IN = S$ , на основ.  $IKLM$  по толстому при немъ углу  $INKM$  и ребру  $IN$  составь приз.  $IKLMNOPQ$  (373); оная и будетъ требуемая (432).

2) Пусть ребро  $T$  въ составляемой призмѣ должно соответствовать ребру  $AB$  данной. На прямой  $IK = T$  составь многоуг.  $IKLM$  подобный многоуг-ку  $ABCD$  и въ ономъ при прямой  $IK$  и точкѣ  $I$  составь т. уг.  $INKM =$  т. уг.  $AEBD$ , потомъ къ  $AB$ ,  $IK$  и  $AE$  найди четвертую пропорціональную и взявъ  $IN$  ей равную, поступи такъ, какъ въ пер-

вомъ случаѣ; чрезъ что и будешь имѣть требуемую прам.  $IKLMNOPQ$  (432).

434. Предложеніе III. С. Подобные многогранники состоятъ изъ равноугольных подобныхъ пирамидъ.

Пусть таковыя многогранники  $ABCDEFGH$  и  $OPQRSTU$ . Опъ. вершинъ  $A$  и  $O$  сходственных толстыхъ угловъ, проводи до вершинъ  $C, F, G, H$  и  $Q, T, U, V$  всѣхъ прочихъ угловъ, кои не суть при ребрахъ оныхъ толстыхъ угловъ, прямыя  $AC, AF, AG, AH$  и  $OQ, OT, OU, OV$ ; усмотришь, что многогранники, какъ содержимые гравиями равноугольными, чрезъ сіе раздѣляющія на равноуголныя пирамиды  $ABCCF, AFGHE, ACGHD$  и  $OPQUT, OTUVS, OQUVR$  (414). Въ сихъ многогранникахъ т. уг. при точкѣ  $B =$  т. уг. при точкѣ  $P$  и  $AB:OP = BF:PT$  по положенію; чего ради прд.  $ABCCF$  подобна прд.  $OPQUT$  (450). Также т. уг. при точкѣ  $E =$  т. уг. при точкѣ  $S$  и  $AE:OS = EF:ST$  по положенію; почему прд.  $AFGHE$  подобна прд.  $OTUVS$  (450). Наконецъ т. уг. при точкѣ  $D =$  т. уг. при точкѣ  $R$  и  $AD:OR = DC:RQ$  по положенію; то будетъ и прд.  $ACGHD$  подобна прд.  $OQUVR$  (450). Слѣдов. и проч.

435. Присовокъ. Отсюда имѣемъ средство по данному ребру  $OF$  составить многогранникъ, подобный данному многограннику  $ABCDEFGH$ .

Пусть ребро  $OP$  въ составляемомъ многогранникѣ должно соотвѣтствовать ребру  $AB$  даннаго. Сей послѣдній изъ вершины  $A$  т. угла  $AEBD$ , лежащаго при томъ ребрѣ  $AB$ , раздѣли на пирамиды  $ABCCF, AFGHE$  и  $ACGHD$ ; потомъ при ребрѣ  $OP$  и точкѣ  $P$  составь т. уг.  $POQT =$  т. уг.  $BACF$  (357) и въ плоскихъ углахъ  $OPT$  и  $TPQ$  на  $OP$  и  $PQ$  составь многоуг-ки  $OPTS$  и  $PQUT$  подобные много-

уг-мъ  $AEFE$  и  $BCGF$ , каждый къ каждому (185): по проведеніи прямыхъ  $OT$  и  $OU$  получишь прд.  $OPQUT$  подобную прд.  $ABCGF$  (430); далѣе въ плоскости  $STU$  сдѣлай уг.  $TSV =$  уг.  $FEN$  и взявъ  $SV$ , равную четеершой пропорціональной къ  $EF$ ,  $ST$  и  $EN$ , проведи прямую  $OV$  и  $UV$ : произойдетъ прд.  $OTUVS$  подобная прд.  $AFGHE$  (430); наконецъ въ плоскости  $OPQ$  составь на  $OQ$  треуг.  $OQR$  подобный треугку  $ACD$  и проведи прямую  $UR$ ; получишь прд.  $OQUVR$  подобную прд.  $ACGHD$  (430); чего ради многогр.  $OPQRSTUVWXYZ$  подобенъ многогр-ку  $ABCDEFGH$  (434) и слѣдов. есть требуемый.

436. Предложеніе IV. Подобные параллелепипеды ( $AECG$  и  $INLO$ ) суть въ отноше-  
Черт. 152. ній кубовъ изъ соответственныхъ изъ реберъ ( $AB$  и  $IK$ ) или высотъ ( $EF$  и  $NP$ ).

Въ основ-хъ  $AC$  и  $IL$  изъ  $F$  и  $P$  опустя на  $AB$  и  $IK$  перпендикуляры  $FH$  и  $PQ$  (59) и проведи  $EH$  и  $NQ$ , кои къ  $AB$  и  $IK$  также будутъ перпендикулярны (528); почему треугки  $EFH$  и  $NPQ$ , въ коихъ уг.  $EFH =$  уг.  $NPQ$ , какъ каждый прямой (519), в уг.  $EHF =$  уг.  $NQP$ , какъ углы наклоненія толстыхъ угловъ равныхъ по положенію, суть подобны и  $EH : NQ = EF : NP$  (203). Также докажешь, что треугки  $EIH$  и  $NIQ$  подобны и  $EA : NI = EH : NQ$  (203); чего ради будетъ  $AB : IK (= EA : NI) = EF : NP$  (201 и 159). Теперь въ основ-хъ  $AC$  и  $IL$  проведи ихъ высоты  $AD$  и  $IM$ ; усмотришь, что основ.  $AC =$  прмг.  $\overline{AB}, \overline{AD}$  и основ.  $IL =$  прмг.  $\overline{IK}, \overline{IM}$ . Поелику же основ.  $AC$ : основ.  $IL (= \text{кдр. } \overline{AB} : \text{кдр. } \overline{IK}) = \text{кдр. } \overline{EF} : \text{кдр. } \overline{NP}$  (209, 193 и 159), то будетъ прмг.  $\overline{AB}, \overline{AD} : \text{прмг. } \overline{IK}, \overline{IM} = \text{кдр. } \overline{EF} : \text{кдр. } \overline{NP}$  или прмг.  $\overline{AB}, \overline{AD} : \text{кдр. } \overline{EF} = \text{прмг. } \overline{IK}, \overline{IM} : \text{кдр. } \overline{NP}$  (169); но прмг.

$\overline{AB}, \overline{AD}, \overline{EF}$ : куб.  $\overline{EF}$  = призм.  $\overline{AB}, \overline{AD}$ : кдр.  $\overline{EF}$  и призм.  $\overline{IK}, \overline{IM}, \overline{NP}$ : куб.  $\overline{NP}$  = призм.  $\overline{IK}, \overline{IM}$ : кдр.  $\overline{NP}$  (419), чего ради призм.  $\overline{AB}, \overline{AD}, \overline{EF}$ : призм.  $\overline{IK}, \overline{IM}, \overline{NP}$  = куб.  $\overline{EF}$ : куб.  $\overline{NP}$  (159 и 169) или = куб.  $\overline{AB}$ : куб.  $\overline{IK}$  (421 и 159) и слѣдов. призм.  $\overline{AECG}$ : призм.  $\overline{INLO}$  = куб.  $\overline{AB}$ : куб.  $\overline{IK}$  или = куб.  $\overline{EF}$ : куб.  $\overline{NP}$ , ибо призм.  $\overline{AB}, \overline{AD}, \overline{EF}$  = призм.  $\overline{AECG}$  и призм.  $\overline{IK}, \overline{IM}, \overline{NP}$  = призм.  $\overline{INLO}$  (389).

437. Присовок. Отсюда слѣдуетъ, что подобныя призмы и пирамиды суть въ отношеніи кубовъ изъ соотвѣствующихъ ихъ реберъ или изъ ихъ высотъ (382, 391, 402 и 160).

438. Предложеніе V. Вообще подобныя многогранники ( $ABCDEFGH$  и  $OPQRSTU$ ) Черт. 151. суть въ отношеніи кубовъ изъ сходственныхъ ихъ реберъ ( $AB$  и  $OP$ ).

Сдѣлавъ тоже строеніе, что и въ предложеніи III (434), усмотришь, что данныя подобныя многогранники  $ABCDEFGH$  и  $OPQRSTU$  раздѣлятся на равномысля и подобныя пирамиды  $ABCGF$ ,  $AFGHE$ ,  $ACGHD$  и  $OPQUT$ ,  $OTUVS$  и  $OQUVR$ , каждая каждой (434); почему будетъ призм.  $ABCGF$ : призм.  $OPQUT$  = куб.  $\overline{AB}$ : куб.  $\overline{OP}$ , призм.  $AFGHE$ : призм.  $OTUVS$  = куб.  $\overline{AE}$ : куб.  $\overline{OS}$  и призм.  $ACGHD$ : призм.  $OQUVR$  = куб.  $\overline{AD}$ : куб.  $\overline{OR}$  (436). Но для подобія граней  $AB: OP = AE: OS = AD: OR$  (401); чего ради многогр.  $ABCDEFGH$ : многогр.  $OPQRSTU$  = куб.  $\overline{AB}$ : куб.  $\overline{OP}$  (421, 159 и 178).

# КНИГА ЧЕТВЕРТАЯ.

*О свойствахъ, которыя имѣютъ мѣсто при взаимномъ сопряженіи трехъ кругомъ образованныхъ поверхностей съ прямыми линіями и плоскостями.*

---

Кругомъ образованныя поверхности, какъ-то во Введеніи видѣли, суть: коническая, цилиндрическая и сферическая; почему предметы, сію книгу составляющіе, должны состоять быть: конусъ, цилиндръ и сфера или шаръ. Но въ усъ въ разсужденіи цилиндра тоже, что пирамида въ разсужденіи призмы; то, какъ о сихъ послѣднихъ въ предыдущей книгѣ предложено вмѣстѣ, такъ о конусѣ и цилиндрѣ здѣсь предложимъ вмѣстѣ же. И такъ книгу сію составляють слѣдующія двѣ главы:

I. О конусѣ и цилиндрѣ.

II. О сферѣ или шарѣ.

---

## КНИГИ ЧЕТВЕРТОЙ ГЛАВА I.

*О конусѣ и цилиндрѣ.*

---

439. *Опредѣленіе I.* Если неопредѣлен-

Черт. 153. ная прямая (AB), проходящая чрезъ непод-

важную точку ( $A$ ), въ плоскости круга ( $DE$ ) находящуюся, прилежѣ къ окружности сего круга, совершивъ около оной цѣлое обращеніе: то каждая изъ произведенныхъ чрезъ сіе обращеніе поверхностей ( $ADE$  и  $AFG$ ), порознь, коническою поверхностію называется, а обѣ вмѣстѣ противоположенными коническими поверхностями именуется; определенное же пространство, содержимое кругомъ ( $DE$ ) и коническою поверхностію ( $ADE$ ), конусомъ именуется.

440. *Примовок. 1.* Кругъ  $DE$  основаніемъ, а неподвижная точка  $A$  вершиною конуса именуется; прямая же  $AC$ , отъ вершины  $A$  до центра  $C$  основанія проведенная, осью конуса называется. И если ось сія будетъ перпендикулярна къ основанію, то конусъ именуется *прямымъ*; если же нѣтъ, то *наклоннымъ*.

441. *Примовок. 2.* Происхожденіе прямого конуса можно предсказать еще такимъ образомъ:

Ежели прямоугольный треугол.  $ABC$  около Черт. 159. одного катета  $AC$ , приемлемо за неподвижный, совершить цѣлое обращеніе; то другой катетъ  $BC$  опишетъ кругъ  $BD$  (25), а гипотенуза  $AB$  коническую поверхность, содержащую съ онымъ кругомъ прямой конусъ  $ABD$ .

442. *Примовок. 3.* Всякая прямая  $AB$ , Черт. 153. проходящая чрезъ вершину конуса  $ADE$  и прилежащая къ окружности его основанія  $DE$ , стороною конуса называется.

443. *Примовок. 4.* Въ конусѣ, какъ и въ пирамидѣ, перпендикуляръ, опущенный изъ

вершины его на плоскость основанія, за  
высоту онаго приемлется.

Черт. 153.

444. *Опредѣленіе II.* Если какой нибудь конусъ ( $ADE$ ) разсѣчется плоскостію ( $HK$ ), параллельною его основанію ( $DE$ ), на двѣ части ( $АНК$  и  $DEHK$ ) и изъ сихъ частей та, въ которой вершина ( $A$ ) его находится, оплывется; то оставшаяся часть ( $DEHK$ ) называется *усѣченнымъ конусомъ*, какъ и оставшаяся часть поверхности именуется *поверхностію сего усѣченнаго конуса*.

445. *Примовок. 1.* Кругъ  $DE$  и параллельный оному кругъ  $HK$  (\*) называются *основаніями* усѣченнаго конуса  $DEHK$ , а при томъ первый *нижнимъ*, а другой *верхнимъ*; оставшаяся же часть  $IC$  оси  $AC$  именуется *осью* усѣченнаго конуса. И если ось сія будетъ перпендикулярна, то усѣченный конусъ называется *прямымъ*; если же нѣтъ, то *наклоннымъ*.

446. *Примовок. 2.* Происхожденіе прямаго усѣченнаго конуса можно представить еще такимъ образомъ:

Черт. 163.

Если прямоугольная трапеція  $BCFE$  около стороны своей  $CF$ , перпендикулярной къ параллельнымъ ей сторонамъ  $BC$  и  $EF$ , совершитъ цѣлое обращеніе: то оныя параллельныя стороны опишутъ круги  $BD$  и  $EG$  (25), между собою параллельные (540);

---

(\*) Проведи  $CB$ ,  $CD$ ,  $IL$  и  $IN$ ; найдешь, что  $CB : IL (= AC : AI) = CD : IN$  (179 и 159) и  $IL = IN$  (165), ибо  $CB = CD$ ; слѣдов. линія  $HLK$  круговая и плоскость  $HK$ , прл-ная кругу  $DE$ , есть кругъ (25).

а наклонная въ нѣмъ сторона  $BE$  поверхность, содержащую съ оными кругами прямой усѣченный конусъ  $BDEG$ .

447. Присовок. 3. Оставшаяся отъ вся- Черт. 153.  
кой стороны, какъ  $AD$ , часть  $DN$  въ усѣченномъ конусѣ стороною его называется.

448. Присовок. 4. Также оставшаяся часть отъ высоты цѣлаго конуса въ усѣченномъ за высоту онаго приемлется.

449. Опредѣленіе III. Если неопредѣ- Черт. 154.  
ленная прямая ( $AB$ ), всегда параллельная другой прямой ( $CD$ ), чрезъ центръ ( $C$ ) круга ( $EF$ ) проходящей и въ его плоскости находящейся, прилежа въ окружности сего круга, совершитъ около оной цѣлое обращеніе: то произведенная чрезъ сіе обращеніе поверхность ( $EFGH$ ) цилиндрическою называется; опредѣленное же пространство ( $EFGH$ ), содержащее сею поверхностью, онымъ кругомъ и плоскостію ( $GH$ ), параллельною ему проведенною, цилиндромъ именуется.

450. Присовок. 1. Кругъ  $EF$  и параллельная ему плоскость  $GH$ , которая есть кругъ же оному равный (94 и 248), основаниями цилиндра называются, изъ коихъ первый нижнимъ, а другій верхнимъ именуются. Прямая же  $CD$ , параллельно которой прямая  $AB$ , обращаясь около окружности круга  $EF$ , произвела цилиндрическую поверхность, называется осью цилиндра. И если ось сія будетъ перпендикулярна, то цилиндръ именуется *прямымъ*; если же нѣтъ, то *наклоннымъ*.

451. Присовок. 2. Происхожденіе прямого цилиндра можно представить еще такъ образомъ:

Черт. 156. Если прмт.  $AEEC$  около одной стороны  $EF$ , приемлемой за неподвижную, совершить какое обращение: то прилежащая к ней стороны  $AE$  и  $CF$  опишутъ круги  $AB$  и  $CD$ , между собою равные и параллельные (248 и 540), а противолежащая ей сторона  $AC$  цилиндрическую поверхность, содержащую съ этими кругами прямой цилиндръ  $ABCD$ .

Черт. 154. 452. Присовок. 5. Всякая прямая  $IK$ , параллельная оси  $CD$  и отъ поверхности одного основания  $EF$  до поверхности другого основания  $GH$  простирающаяся, *стороною* цилиндра называется.

453. Присовок. 4. Въ цилиндрѣ, какъ и въ призмѣ, перпендикуляръ изъ какой нисетъ точки одного его основания опущенный на плоскость другого, за *высоту* оного принимается.

Черт. 155. 454. Определение IV. Когда плоскость ( $ADEF$  или  $EGHF$ ) вступая въ поверхность конуса ( $ABC$ ) или цилиндра ( $ABCD$ ) въ какой нисетъ прямой ( $AD$  или  $EF$ ), которая есть сторона конуса или цилиндра, прилежащая къ сей поверхности съ выпуклою ей стороны столь близко, что между тою наискорѣйшею и сегою поверхностью чрезъ прямую ( $AD$  или  $EF$ ) на единой плоскости провести не можно; то оная плоскость ( $ADEF$  или  $EGHF$ ) называется *касательною* къ поверхности конуса ( $ABC$ ) или цилиндра ( $ABCD$ ) при той прямой ( $AD$  или  $EF$ ).

455. Присовок. 1. Откуда явствуешь, что при сторонѣ конуса или цилиндра больше одной касательной плоскости провести не можно.

456. *Присовок. 2.* Опшуда же явствуетъ, что плоскость, проходящая чрезъ сторону конуса или цилиндра и касательную къ основанію того или другаго, есть касательная къ поверхности конуса или цилиндра (228 и 454).

457. *Опредѣленіе V.* Пирамида ( $ABCDEF$ ) Черт. 156. или призма ( $ABCDEFGHIK$ ) называется вписанною въ конусъ ( $AGH$ ) или въ цилиндръ ( $LMNO$ ), когда основаніе пирамиды или призмы есть многоугольникъ, вписанный въ основаніи конуса или цилиндра, а вершина пирамиды есть вершина конуса, или верхнее основаніе призмы есть многоугольникъ, вписанный въ верхнемъ основаніи цилиндра. И обратно: конусъ или цилиндръ именуется *описаннымъ* около пирамиды или призмы, когда основаніе конуса или цилиндра есть кругъ, описанный около основанія пирамиды или призмы, а вершина конуса есть вершина пирамиды, или верхнее основаніе цилиндра есть кругъ, описанный около верхняго основанія призмы.

458. *Опредѣленіе VI.* Пирамида ( $ABCDEF$ ) или призма ( $ABCDEFGHIK$ ) называется *описанною* около конуса ( $AGH$ ) или цилиндра ( $LMNO$ ), когда основаніе пирамиды или призмы есть многоугольникъ, описанный около основанія конуса или цилиндра, а вершина пирамиды есть вершина конуса, или верхнее основаніе призмы есть многоугольникъ, описанный около верхняго основанія цилиндра. И обратно: конусъ или цилиндръ именуется *вписаннымъ* въ пирамидъ или въ призмъ, когда основаніе конуса или цилиндра есть кругъ, вписанный въ основаніи

пирамиды или призмы, а вершина конуса есть вершина пирамиды, или верхнее основание цилиндра есть кругъ, вписанный въ верхнемъ основаніи призмы.

459. *Присовок.* Изъ сихъ опредѣлений слѣдуетъ, что поверхность правильной пирамиды, вписанной въ прямой конусъ, такъ относится къ ея основанію, какъ апогема къ высотѣ отъ центра онаго основанія; а поверхность правильной пирамиды, описанной около прямого конуса, такъ относится къ ея основанію, какъ сторона конуса къ радіусу его основанія (369, 276 и 192); поверхность же правильной призмы, вписанной въ прямой цилиндръ, такъ относится къ ея основанію, какъ сторона цилиндра къ половинѣ высоты отъ центра онаго основанія; а поверхность правильной призмы, описанной около прямого цилиндра, такъ относится къ ея основанію, какъ сторона цилиндра къ половинѣ радіуса его основанія (369, 111, 276 и 192).

Черт. 158.

460. *Предложеніе I. Л.* Избытокъ поверхностей правильныхъ пирамидъ, описываемыхъ около прямого конуса трезъ удвоеніе числа сторонъ, предъ поверхностями соответственныхъ правильныхъ пирамидъ, подобными образомъ вписываемыхъ въ тождъ же конусъ, можетъ сдѣлаться меньше всякой произволенію данной величины.

Пусть треугольн.  $QAB$  и  $QEF$  суть стороны правильныхъ вписанной въ прямой конусъ  $QAT$  и описанной около него пирамидъ и пусть треугольн.  $QAD$  и  $QRS$  стороны таковыхъ же пирамидъ, вдвое больше сторонъ имѣющихъ. Изъ точекъ  $A$  и  $D$  въ

плоскостяхъ  $QRO$  и  $QSO$  проведемъ  $AV$  и  $DV$ , прямыя  $RQ$  и  $SQ$ ; чрезъ что составится треуг.  $VAD$ , сторона пирамиды, подобной той, коей сторона есть треуг.  $QRS$  (429). Означимъ поверхности вдвое больше стороны имѣющихъ пирамиды: вписанной чрезъ  $P$ , описанной чрезъ  $Q$  и ей подобной чрезъ  $S$ . Треуг.-ки  $QRS$  и  $VAD$  суть подобны (530 и 265); посему треуг.  $QRS$ : треуг.  $VAD$  ( $=$  кдр.  $RS$ : кдр.  $AD$ )  $= OD:OK$  (210 и 291 или 505),  $Q:S=OD:OK$  (160) и  $Q-S:Q=OD-OK:OD$  (170). Но  $DK (=OD-OK)$ , отъ вписыванія и описыванія правильныхъ многоугольниковъ чрезъ удвоеніе числа сторонъ ихъ въ кругъ  $ABT$  и около него, и слѣдов. отъ вписыванія и описыванія въ примомъ конусъ  $QAT$  и около него подобныхъ пирамидъ, стоящихъ на сихъ многоугольникахъ, уменьшаясь половиною величины своей (101 или 505), можетъ сдѣлаться меньше всякой по произволению данной величины; чего ради и избытокъ поверхностей правильныхъ пирамидъ, описываемыхъ чрезъ удвоеніе числа сторонъ около прямого конуса  $QAT$ , предъ поверхностями подобныхъ имъ пирамидъ, въ томъ же конусѣ вписываемыхъ, также можетъ сдѣлаться меньше всякой по произволению данной величины (151 или 165). Поверхность же  $P$  вписанной пирамиды больше поверхности  $S$  пирамиды, копорая подобна описанной; чего ради избытокъ поверхностей правильныхъ пирамидъ, чрезъ удвоеніе числа сторонъ описываемыхъ около прямого конуса, предъ поверхностями подобно имъ въ немъ вписываемыхъ и паче

можетъ сдѣлаться меньше всякой по произволѣнiю данной величины.

461. *Присовок. 1.* Откуда слѣдуетъ, что избытокъ поверхности прямого конуса предъ поверхностями пирамидъ, вписываемыхъ въ сего конусъ чрезъ удвоенiе числа сторонъ, или избытокъ поверхностей пирамидъ, описываемыхъ около прямого конуса чрезъ удвоенiе же числа сторонъ, предъ поверхностью сего конуса можетъ сдѣлаться и паче меньше всякой по произволѣнiю данной величины.

462. *Присовок. 2.* Поверхность всякой правильной пирамиды, вписанной въ прямой конусъ, меньше шреугольника, коего основанiе окружность основанiя, а высота сторона сего конуса; поверхность же всякой правильной пирамиды, описанной около прямого конуса, больше того же самого шреугольника (110 и 569); посему избытокъ сего шреугольника предъ поверхностями пирамидъ, вписываемыхъ въ томъ конусъ чрезъ удвоенiе числа сторонъ, или избытокъ поверхностей пирамидъ, описываемыхъ около него чрезъ удвоенiе же числа сторонъ, предъ шѣмъ же самымъ шреугольникомъ можетъ сдѣлаться также меньше всякой по произволѣнiю данной величины.

463. *Предложенiе II.* Поверхность прямого конуса есть предѣлъ поверхностей правильныхъ пирамидъ, вписываемыхъ въ него или описываемыхъ около него чрезъ удвоенiе числа сторонъ ихъ.

Поверхности пирамидъ, вписываемыхъ въ прямой конусъ или описываемыхъ около него чрезъ удвоенiе числа сторонъ, уве-

личиваясь или уменьшаясь, никогда до поверхности конуса не достигаютъ, и сія пре-  
бываетъ непремѣнна; также избытокъ по-  
верхности конуса предъ сими увеличиваю-  
щимися поверхностями пирамидъ, или из-  
бытокъ уменьшающихся поверхностей пи-  
рамидъ предъ поверхностію конуса можетъ  
сдѣлаться меньше всякой по произволению  
данной величины (461); чего ради поверх-  
ность прямого конуса есть предѣлъ поверх-  
ностей сихъ пирамидъ (501).

464. *Присовокъ.* Точно также докажется,  
что и треугольникъ, коего основаніе окру-  
жность основанія прямого конуса, а высота  
сторона его, есть предѣлъ поверхностей  
тѣхъ же самыхъ пирамидъ (462).

465. *Предложеніе III.* Поверхность пря-  
маго конуса ( $ABD$ ) равна треугольнику ( $OPQ$ ), Черт. 159.  
котораго основаніе ( $PQ$ ) окружность основа-  
нія ( $BD$ ) сего конуса, а высота ( $PO$ ) сторо-  
на оного ( $AB$ ).

Пусть въ конусѣ  $ABD$  вписана какая  
нибудь правильная пирамида, потомъ чрезъ  
удвоеніе числа сторонъ другая, и такъ да-  
лѣе; поверхность конуса  $ABD$  и треуг.  $OPQ$   
будутъ предѣлы поверхностей сихъ пира-  
мидъ (463 и 464); и слѣдов. равны между  
собою (503).

466. *Предложеніе IV.* С. Поверхность  
прямого усѣченного конуса ( $BDEG$ ), прое-  
цируемаго отъ разсѣченія цѣлаго ( $ABD$ ) по-  
лоскостію ( $EG$ ), параллельною его основанію  
( $BD$ ), равняется прямоугольной трапеціи  
( $PQTX$ ), которой параллельныя стороны ( $PQ$   
и  $XF$ ) суть окружности оснований ( $BD$  и  $EG$ )

сего усѣченного конуса, а высота ( $PX$ ) сторона оного ( $BE$ ).

Пусть треуголка  $OPQ$  основ.  $PQ$ —окржн.  $BD$ , а высота  $PO=AB$ ; будетъ поверхность прямого конуса  $ABD$  равна треуг.  $OPQ$  (465). Отъ  $OP$  возьми  $OX=AE$  и проводи  $X\Gamma$  параллельную  $PQ$  (75); будетъ  $X\Gamma$ —окржн.  $EG$ .

Основ.  $BD$  параллельно основ.  $EG$  по положенію; почему  $AB:AE=BC:EF$  (342 и 179); также  $BC:EF=окржн. BD:окржн. EG$  (513); почему  $AB:AE=окржн. BD:окржн. EG$  (159); но  $OP:OX=PQ:X\Gamma$ ; чего ради  $X\Gamma=окржн. EG$  (160). И такъ поверхность прямого конуса  $AEG$  равна треуг.  $OXT$  (465). Слѣдов. по оппозитіи равныхъ отъ равныхъ будетъ и поверхность прямого усѣченного конуса  $BDEG$  равна прямой трапеціи  $PQTX$ .

Черт. 160. 467. Предложеніе V. Поверхность прямого конуса ( $ABD$ ) равна еще кругу ( $X\Gamma Z$ ), коего радіусъ ( $KL$ ) есть средняя пропорціональная между стороною ( $AB$ ) и радіусомъ ( $BC$ ) основанія сего конуса.

Пусть около прямого конуса  $ABD$  описана какая нибудь правильная прд.  $A'EFGH'I$  и пусть около круга  $X\Gamma Z$  описанъ правильный многоут.  $MNOPQ$ , столько же сторонъ имѣющій, сколько оныхъ имѣетъ основаніе пирамиды—многоут.  $EFGH'I$ ; усмотришь, что сіи многоугольники суть подобны (202) и потому многоут.  $MNOPQ$ : многоут.  $EFGH'I$  = вдр.  $KL$  (= прдг.  $AB, BC$ ): вдр.  $BC$  (292 и 195) =  $AB:BC$  (191); но поверхность прд.  $A'EFGH'I$  также относителъ къ многоут-ку  $EFGH'I$ , какъ  $AB$  къ  $BC$  (459); чего ради поверхность пирамиды  $A'EFGH'I$  многоугольни-

ку  $MNOPQ$  равна (166). Теперь если чрезъ удвоение числа сторонъ около прямого конуса  $ABD$  опишется другая правильная пирамида, а около круга  $XYZ$  другой правильный многоугольникъ, и такъ далѣе: то поверхность прямого конуса будетъ предѣлъ сихъ поверхностей пирамидъ (465), а кругъ  $XYZ$  предѣлъ сихъ многоугольниковъ (503); слѣдов. поверхность прямого конуса  $ABD$  кругу сему  $XYZ$  равна (505).

468. Присовок. 1. Отсюда слѣдуетъ, что поверхность прямого конуса  $ABD$  къ его основанію  $BD$  такъ относится, какъ сторона  $AB$  къ радіусу  $BC$ .

Круг.  $XYZ$ : круг.  $BD = \text{кдр. } \overline{KL} (= \text{прмг. } \overline{AB, BC}) : \text{кдр. } \overline{BC} = AB : BC$  (313, 195 и 191) и круг.  $XYZ$  равенъ поверхности конуса  $ABD$ ; чего ради присовокупленіе сіе явствуетъ.

469. Присовок. 2. Если сторона  $AB$  прямого конуса  $ABD$  раздѣлиши пополамъ и изъ точки дѣленія въ плоскости прямыхъ  $AB$  и  $AC$  поставиши на ней перпендикуляръ  $RS$ , продолженный до пресѣченія съ осью  $AC$ ; потомъ найдется средняя пропорціональная  $X$  между имъ, двукратно взятымъ, и сею осью: то кругъ, тою среднею пропорціональною описанный, также равенъ будетъ поверхности оного конуса. Черт. 159.

Проведемъ  $RT$  прл-ную  $BC$  (75); въ прмг. треуг-хъ  $ACB$  и  $RTS$  будетъ уг.  $ACB = \text{уг. } RTS$  (77) и уг.  $BAC = \text{уг. } SRT$ ; ибо уг.  $BAC + \text{уг. } ART = \text{уг. } ART + \text{уг. } SRT = \text{п. уг.}$  (81); почему  $AB : AC = RS : RT$  (203) или  $= 2 RS : 2 RT (= BC)$  (160 и 101) и прмг.  $\overline{AB, BC} = \text{прмг. } 2RS, AC$  (195); но прмг.  $\overline{AB, BC} = \text{кдр. } \overline{KL}$  Черт. 160.

(467) и прмг.  $\overline{RS}, \overline{AC} = \text{кдр. } \overline{X}$  (195); чего ради круги, описанные радиусами  $KL$  и  $X$ , равны между собою; слѣдов. и проч.

Черт. 161.

470. Присовок. 5. Поверхности прямыхъ конусовъ  $ABD$  и  $EFH$ , коихъ оси  $AC$  и  $EG$  пропорціональны радиусамъ  $BC$  и  $FG$  ихъ оснований, суть въ отношеніи квадратовъ изъ сихъ линий.

Найди между  $AB$  и  $BC$  и между  $EF$  и  $FG$  среднія пропорціональныя  $KI$  и  $ML$  (187) и опиши ими круги  $P$  и  $Q$ ; усмотришь, что  $P:Q (= \text{кдр. } \overline{KI}: \text{кдр. } \overline{ML}) = \text{прмг. } \overline{AB}, \overline{BC}: \text{прмг. } \overline{EF}, \overline{FG}$  (515 и 195); но въ прмг-хъ преуг.  $ACB$  и  $EGF$ ,  $AC:BC = EG:FG$  по положенію; чего ради  $AB:BC = EF:FG$  (206) и прмг.  $\overline{AB}, \overline{BC}: \text{кдр. } \overline{BC} = \text{прмг. } \overline{EF}, \overline{FG}: \text{кдр. } \overline{FG}$  (191 и 159). И такъ  $P:Q = \text{кдр. } \overline{BC}: \text{кдр. } \overline{FG}$  или  $= \text{кдр. } \overline{AC}: \text{кдр. } \overline{EG}$  (169, 195 и 159); слѣдов. и проч.

Черт. 162. Предложеніе VI. С. Поверхность прямого усѣченного конуса ( $BDEC$ ), производшаго отъ разсѣченія цѣлаго ( $ABD$ ) плоскостію ( $EG$ ) параллельною его основанію ( $BD$ ), равняется еще кругу ( $X$ ), коего радиусъ ( $MN$ ) есть средняя пропорціональная между сторонами ( $BE$ ) и взятыми вѣдѣсть радиусами ( $BC$  и  $EF$ ) оснований сего усѣченного конуса.

Сыщи между  $AB$  и  $BC$  и между  $AE$  и  $EF$  среднія пропорціональныя  $HI$  и  $KL$  (187) и опиши ими круги  $P$  и  $Q$ ; сіи круги будутъ равны поверхностямъ конусовъ  $ABD$  и  $AEG$  (467); попомъ изъ пропорціи  $BE:MN = MN:BC+EF$  получишь  $\text{кдр. } \overline{MN} = \text{прмг. } \overline{BE}, (\overline{BC} + \overline{EF})$

(195) = прмг.  $\overline{AB}, (\overline{BC+EF})$  — прмг.  $\overline{AE}, (\overline{BC+EF})$ ; но прмг.  $\overline{AB}, (\overline{BC+EF}) = \text{прмг. } \overline{AB}, \overline{BC} + \text{прмг. } \overline{AB}, \overline{EF}$ , прмг.  $\overline{AE}, (\overline{BC+EF}) = \text{прмг. } \overline{AE}, \overline{BC} + \text{прмг. } \overline{AE}, \overline{EF}$  и прмг.  $\overline{AB}, \overline{EF} = \text{прмг. } \overline{AE}, \overline{BC}$  (195), ибо  $AB:AE = BC:EF$  (181); посему прмг.  $\overline{AB}, (\overline{BC+EF}) - \text{прмг. } \overline{AE}, (\overline{BC+EF}) (= \text{кдр. } \overline{MN}) = \text{прмг. } \overline{AB}, \overline{BC} - \text{прмг. } \overline{AE}, \overline{EF}$ ; равнымъ образомъ прмг.  $\overline{AB}, \overline{BC} = \text{кдр. } \overline{HI}$  и прмг.  $\overline{AE}, \overline{EF} = \text{кдр. } \overline{KL}$  (195 и 467); чего ради кдр.  $\overline{MN} - \text{кдр. } \overline{HI} - \text{кдр. } \overline{KL}$  и круг.  $X = \text{круг. } P - \text{круг. } Q$  (314); слѣдов. и проч.

472. Присовок. 1. Если сторона  $BE$  прямого усѣченного конуса  $BDEC$  раздѣлится пополамъ, изъ точки дѣленія въ плоскости прямыхъ  $BE$  и  $CF$  проведется перпендикуляръ  $RS$  до пресѣченія съ осью  $CF$  и найденная средняя пропорціональная  $T$  между ими, двукратно взятымъ, и сею осью: то кругъ, тою среднею пропорціональною описанный, также равенъ будетъ поверхности снзго конуса. По проведеніи прямой  $RT$  параллельной  $BC$  или  $EF$ , какъ и въ присовокупленіи 2 къ предложенію V докажется, что  $AB:AC = 2RS:2RT$  (469); но  $AB:AC = BE:CF$  (180); чего ради  $BE:CF = 2RS:2RT$  ( $= BC+EF$ ) (159 и 114) и прмг.  $\overline{BE}, (\overline{BC+EF}) = \text{прмг. } 2RS, CF$ ; и какъ прмг.  $\overline{BE}, (\overline{BC+EF}) = \text{кдр. } \overline{MN}$  и прмг.  $2RS, CF = \text{кдр. } T$  (195); то слѣдуетъ, что круги, описанные радіусами  $MN$  и  $T$  равны между собою; слѣдов. и проч.

473. Присовок. 2. Поверхности прямыхъ усѣченныхъ конусовъ  $BDEC$  и  $ILMO$ , коихъ черт. 163

оси  $CF$  и  $KN$  пропорціональны радіусамъ  $BC$ ,  $IK$  и  $EF$ ,  $MN$  ихъ оснований, суть въ отношеніи квадратовъ изъ оныхъ линий.

Найди между  $BE$  и  $BC+EF$  и между  $IM$  и  $IK+MN$  среднія пропорціональныя  $PQ$  и  $RS$  (187) и опиши ими круги  $X$  и  $Y$ ; усмотришь, что  $X:Y$  ( $=$  кдр.  $\overline{PQ}$  кдр.  $\overline{RS}$ )  $=$  прмг.  $\overline{BE}$ ,  $(BC+EF)$ : прмг.  $\overline{IM}$ ,  $(IK+MN)$  (313 и 195). Но по положенію  $CF:CB:FE=KN:KI:NM$  и уг.  $BCF=$  уг.  $IKN$ , какъ каждый прямой; посему, по проведеніи прямыхъ  $BF$  и  $IN$ , получится уг.  $BFC=$  уг.  $INK$ , уг.  $BFE=$  уг.  $INM$ ,  $BF:IN$  ( $=CF:KN$ )  $=EF:MN$  и  $BE:EF=IM:MN$  (206); чего ради, имѣя изъ  $BC:EF=IK:MN$  пропорцію  $BC+EF:EF=IK+MN:MN$  (170), получишь  $BE+EF:BE=IK+MN:IM$  (175) и прмг.  $(\overline{BE+EF}), \overline{BE}$ : кдр.  $\overline{BE}=$  прмг.  $(\overline{IK+MN}), \overline{IM}$ : кдр.  $\overline{IM}$  (191 и 159). И такъ  $X:Y$  [ $=$  прмг.  $(\overline{BC+EF}), \overline{BE}$ : прмг.  $(\overline{IK+MN}), \overline{IM}$ ]  $=$  кдр.  $\overline{BE}$ : кдр.  $\overline{IM}$  (159); слѣдов. и проч.

*Примѣч.* Всѣ предложенія, которыя здѣсь доказаны въ разсужденіи поверхности прямого усѣченного конуса, имѣющаго мѣсто и въ разсужденіи поверхности прямого цилиндра, и сія послѣднія изъ первыхъ произведены быть могутъ; ибо стоитъ только въ предложеніяхъ IV и VI и въ присовокупленіяхъ къ онымъ положить радіусъ верхняго основанія прямого усѣченного конуса равнымъ радіусу нижняго его основанія. Впрочемъ цилиндръ и усѣченный конусъ суть два тѣла между собою совершенно различныя; — посему въ слѣдующемъ всѣ предложенія, относящіяся до поверхности прямого цилиндра, произведемъ непосредственно изъ самаго понятія о сей поверхности.

474. Предложеніе VII. А. Избытокъ поверхностей правильныхъ призмъ, описываемыхъ около прямого цилиндра трезъ удвоеніе числа сторонъ, предъ поверхностями соответственныхъ правильныхъ призмъ, подобными образомъ въ томъ же цилиндръ вписываемыхъ, можетъ сдѣлаться меньше всякой по произволению данной величины.

Пусть прмг-ки  $ABLM$  и  $EFNQ$  стороны Черт. 164. правильныхъ вписанной въ прямоу цилиндръ  $ATMV$  и описанной около него призмъ, и пусть прмг-ки  $ADXN$  и  $RSZY$  стороны таковыхъ же призмъ, вдвое больше сторонъ имѣющихъ. Означимъ поверхности сихъ послѣднихъ призмъ вписанной чрезъ  $P$  и описанной чрезъ  $Q$ ; найдемъ, что прмг.  $RSZY$ : прмг.  $ADXN$  ( $=$  кдр.  $RS$ : кдр.  $AD$ )  $= OD:OK$  (209 и 291 или 305),  $Q:P = OD:OK$  и  $Q - P:Q = OD - OK:OD$  (160 и 170). Но  $DK (= OD - OK)$ , отъ вписыванія и описыванія правильныхъ многоугольниковъ чрезъ удвоеніе числа сторонъ ихъ въ кругъ  $ABT$  и около него и слѣдов. отъ вписыванія и описыванія въ прямоу цилиндръ  $ATMV$  правильныхъ призмъ, стоящихъ на сихъ многоугольникахъ, уменьшаясь половиною величины своей (101 или 305) можетъ сдѣлаться меньше всякой по произволению данной величины; чего ради и избытокъ поверхностей правильныхъ призмъ, описываемыхъ чрезъ удвоеніе числа сторонъ около прямого цилиндра  $ATMV$ , предъ поверхностями подобныхъ имъ призмъ (429) въ томъ же цилиндръ вписываемыхъ, также можетъ сдѣлаться меньше всякой по произволению данной величины (151 или 165).

475. *Присовок. 1.* Отсюда слѣдуетъ, что избытокъ поверхности прямого цилиндра предъ поверхностями призмъ, вписываемыхъ въ сего цилиндръ чрезъ удвоеніе числа сторонъ, или избытокъ поверхностей призмъ, описываемыхъ около прямого цилиндра чрезъ удвоеніе же числа сторонъ, предъ поверхностью сего цилиндра можетъ сдѣлаться и на-че меньше всякой по произволению данной величины.

476. *Присовок. 2.* Поверхность всякой правильной призмы, вписанной въ прямомъ цилиндрѣ, меньше прямоугольника, коего основаніе окружность основанія, а высота сторона сего цилиндра; а поверхность всякой правильной призмы, описанной около прямого цилиндра, больше того же самаго прямоугольника (109 и 369); чего ради отсюда же слѣдуетъ, что и избытокъ сего прямоугольника предъ поверхностями призмъ, вписываемыхъ въ томъ цилиндрѣ чрезъ удвоеніе числа сторонъ, или избытокъ поверхностей призмъ, такимъ же образомъ около него описываемыхъ, предъ симъ самымъ прямоугольникомъ можетъ сдѣлаться также меньше всякой по произволению данной величины.

477. *Предложеніе VIII.* Поверхность прямого цилиндра есть предѣлъ поверхностей правильныхъ призмъ, вписываемыхъ въ него и описываемыхъ около него чрезъ удвоеніе числа сторонъ ихъ.

Сіе предложеніе точно также докажется, какъ доказано предложеніе II, относящееся до поверхности прямого конуса (465).

478. *Присовок. Равнымъ образомъ, какъ доказано присовокупленіе къ одному предложенію (464), докажется, что и прямоугольникъ, коего основаніе окружностію основанія прямого цилиндра, а высота сторона оного, есть предѣлъ поверхностей сихъ же самыхъ призмъ.*

479. *Предложеніе IX. Поверхность прямого цилиндра равна прямоугольнику, коего основаніе есть окружність основанія сего цилиндра, а высота сторона оного.*

Пусть въ прямомъ цилиндрѣ будетъ вписана какая нлестъ правильная призма; потомъ чрезъ удвоеніе числа сторонъ другая, и такъ далѣе; поверхность прямого цилиндра и прямоугольникъ, коего основаніе есть окружність основанія сего цилиндра, а высота сторона его, будутъ предѣлы поверхностей сихъ призмъ (477 и 478) и слѣдов. равны между собою (305).

480. *Предложеніе X. Поверхность прямого цилиндра (ABCD) равна еще кругу (RTU),* Черт. 165. *коего радіусъ (RS) есть средняя пропорціональная между стороною (AC) и діаметромъ (AB) основанія сего цилиндра.*

Пусть около прямого цилиндра ABCD описана какая ни естъ правильная прам. GHIKLMNOPQ и пусть около круг. RTU описанъ правильный многоуг. XTZVW, столько же сторонъ имѣющій, сколько оныхъ имѣетъ основаніе приамы — многоуг. GHIKL; усмотришь, что многоугольники сіи суть подобны (202) и потому многоуг. XTZVW : многоуг. GHIKL = кдр. RS (= прам. AB, AC) : кдр. AE = прам. 2 AE, AC : кдр. AE = 2 AC :

$AE = AC : \frac{1}{2} AE$  (292, 191 и 160). Но поверхность прам.  $GHKLMOPQR$  къ многоуг.  $GHKLM$  также относится, какъ  $AC$  къ  $\frac{1}{2} AE$  (459); чего ради поверхность призмъ  $GHKLMOPQR$  многоугольнику  $ATZVW$  равна (160). Теперь если чрезъ удвоение числа сторонъ около прямого цилиндра  $ABCD$  опишется другая правильная призма, а около круга  $RTU$  другой правильный многоугольникъ, и такъ далѣе: то поверхность прямого цилиндра будетъ предѣлъ сихъ поверхностей призмъ (477), а кругъ  $RTU$  предѣлъ сихъ многоугольниковъ (308); слѣдов. поверхность прямого цилиндра  $ABCD$  кругу сему  $RTU$  равна (308).

481. *Присовок. 1.* Отсюда слѣдуетъ, что поверхность прямого цилиндра  $ABCD$  къ его основанію  $AB$  такъ относится, какъ спорона  $AC$  къ половинѣ радіуса  $AE$ .

Кругъ  $RTU$ : кругъ  $AB$  ( $=$  кдр.  $\overline{RS}$  ( $=$  прмг.  $\overline{AE}$ ,  $2 AC$ ): кдр.  $\overline{AE}$ )  $= 2 AC : AE = AC : \frac{1}{2} AE$  (313, 191 и 160) и кругъ  $RTU$  равенъ поверхности цилиндра  $ABCD$ ; чего ради ушверждаемое явствуетъ.

482. *Присовок. 2.* Поверхности прямыхъ Черт. 166. цилиндровъ  $ABCD$  и  $GHK$ , коихъ оси  $EF$  и  $LM$  пропорціональны радіусамъ  $AE$  и  $GL$  ихъ основаній  $AB$  и  $GH$ , суть въ отношеніи квадратовъ изъ сихъ линий.

Найди между  $AC$  и  $2 AE$  и между  $GI$  и  $2 GL$  среднія пропорціональныя  $NO$  и  $RS$  (137) и опиши ими круги  $P$  и  $Q$ ; усмотришь, что  $P : Q$  ( $=$  кдр.  $\overline{NO}$  : кдр.  $\overline{RS}$ )  $=$  прмг.  $2 AB, AC$  : прмг.  $2 GL, GI$  (313, 195 и 157). Но по положенію  $EF : AE = LM : GL$  и  $EF = AC$ ,

а  $LM = GI$ ; то будетъ  $AC:2AE = GI:2GL$  (171) и вдр.  $AC$ : прмг. а  $AE$ ,  $AC =$  вдр.  $GI$ : прмг. а  $GL$ ,  $GI$  (191 и 159). И такъ  $P:Q =$  вдр.  $AC$ : вдр.  $GI$  (169 и 159); слѣдов. и проч.

483. Предложеніе XI. А. Избытокъ пирамидъ, описываемыхъ около конуса чрезъ удвоеніе числа сторонъ, предъ соответственными пирамидами, подобно переымъ въ оной вписываемымъ, можетъ сдѣлаться меньше всякой по произволению данной величины.

Пусть треуг-ки  $QAB$  и  $QEF$  стороны Черт. 158. вписанной въ конусъ  $QAT$  и описанной около него пирамидъ, стоящихъ на правильныхъ многоугольникахъ, и пусть треуг-ки  $QAD$  и  $QRS$  стороны такихъ же пирамидъ, вдвое больше сторонъ имѣющихъ. Означимъ сіи послѣднія пирамиды, вписанную чрезъ  $S$  и основаніе ея чрезъ  $M$ , а описанную чрезъ  $T$  и основаніе ея чрезъ  $N$ ; будетъ  $T:S = N:M$  (420); и какъ  $N:M (=$  вдр.  $RS$ : вдр.  $AD$ )  $= OD:OK$  (211 и 291 или 305); то  $T:S = OD:OK$  (159) и  $T-S:T = OD-OK:OD$  (170). Но  $DK (= OD-OK)$ , отъ вписыванія и описыванія правильныхъ многоугольниковъ чрезъ удвоеніе сторонъ въ кругъ  $ABT$  и около него и слѣдов. отъ вписыванія и описыванія въ конусъ  $QAT$  и около него пирамидъ, стоящихъ на сихъ многоугольникахъ, уменьшаясь половиною величины своей (305) можетъ сдѣлаться меньше всякой по произволению данной величины; чего ради избытокъ пирамидъ, описываемыхъ чрезъ удвоеніе числа сторонъ около конуса  $QAT$ , предъ пирамидами, подобно имъ вписываемыми въ томъ же

конусъ, также можетъ сдѣлаться меньше всякой по произволению данной величины.

484. *Примовок. 1.* Описуеда слѣдующе, что избытокъ конуса предъ пирамидами, вписываемыми въ самъ конусъ чрезъ удвоение числа сторонъ, или избытокъ пирамидъ, подобнымъ образомъ около него описываемыхъ, предъ симъ самымъ конусомъ можетъ сдѣлаться и паче меньше всякой по произволению данной величины.

485. *Примовок. 2.* Всякая пирамида, вписанная въ конусъ, меньше пирамиды, коея основаніе равно основанію конуса и высота равна высотѣ онаго, а всякая пирамида, описанная около конуса, больше той же самой пирамиды (31 и 399); посему описуеда же слѣдующе, что и избытокъ сей пирамиды предъ пирамидами, вписываемыми въ шомъ конусъ чрезъ удвоение числа сторонъ, или избытокъ пирамидъ, подобнымъ образомъ около него описываемыхъ, предъ тою же самою пирамидою можетъ сдѣлаться также меньше всякой по произволению данной величины.

486. *Предложеніе XII.* Конусъ есть предѣлъ пирамидъ, описываемыхъ въ нелъ или описываемыхъ около него чрезъ удвоение числа сторонъ ихъ.

Пирамиды, вписываемыя въ конусъ или описываемыя около него чрезъ удвоение числа сторонъ, увеличиваясь или уменьшаясь, никогда до него не достигаютъ и оный пребываетъ непремѣннымъ; также избытокъ конуса предъ сими увеличивающимися пирамидами, или избытокъ сихъ уменьшающихся пирамидъ предъ конусомъ можетъ

сдѣлаться меньше всякой по произволѣю данной величины (484); чего ради конусъ есть предѣлъ сихъ пирамидъ (301).

487. *Присовокъ.* Точно также докажется, что и пирамида, коей основаніе равно основанію конуса, а высота равна высотѣ онаго, есть предѣлъ тѣхъ же самыхъ пирамидъ (485).

488. *Предложеніе XIII.* Конусъ ( $ABD$ ) равно пирамидѣ ( $FGHIK$ ), которой основаніе ( $GHIK$ ) равно основанію ( $BD$ ) сего конуса, а высота ( $FL$ ) равна высотѣ ( $AE$ ) онаго. Черт. 167.

Пусть въ конусѣ  $ABD$  вписана пирамида, имѣющая основаніемъ какой ни есть правильный многоугольникъ; попомъ чрезъ удвоеніе числа сторонъ другая, и такъ далѣе; конусъ  $ABD$  и пирамида  $FGHIK$  будутъ предѣлы сихъ пирамидъ (486 и 487) и слѣдов. равны между собою (303).

489. *Предложеніе XIV.* С. Усѣченный конусъ ( $BDMP$ ) и усѣченная пирамида ( $GHIKQRST$ ), произшедшіе отъ цѣлаго конуса ( $ABD$ ) и цѣлой пирамиды ( $FGHIK$ ), стоящихъ на равныхъ основаніяхъ ( $BD$  и  $GHIK$ ) и имѣющихъ равныя высоты ( $AE$  и  $FL$ ), посредствомъ разсѣченія сихъ послѣднихъ плоскостями ( $MP$  и  $QRST$ ), параллельными ихъ основаніямъ и отстоящими отъ оныхъ въ равныхъ разстояніяхъ ( $EO$  и  $LU$ ), суть равны между собою.

Проведи радіусы  $BC$  и  $MN$  и прямыя  $CE$ ,  $NO$ ,  $GL$  и  $QU$ ; усмотришь, что  $AO=FU$ ,  $MN$  и  $NO$  равны  $BC$  и  $CE$ , а  $QU$  и  $QR$  равны  $GL$  и  $GH$ , каждая каждой (342); чего ради  $AE:AO (=AC:AN)=BC:MN$ ,  $FL:FU (=FE:FQ)=GH:QR$  (179 и 181),  $BC:MN=$

$\overline{GH} : \overline{QR}$  (159) и кдр.  $\overline{BC} : \text{кдр. } \overline{MN} = \text{кдр. } \overline{GH} : \text{кдр. } \overline{QR}$  (195); ибо  $FL = AE$  и  $FU = AO$ . Но круг.  $BD : \text{круг. } MP = \text{кдр. } \overline{BC} : \text{кдр. } \overline{MN}$  (515) и многоуг.  $GHIK : \text{многоуг. } QRST = \text{кдр. } \overline{GH} : \text{кдр. } \overline{QR}$  (211); почему круг.  $BD : \text{круг. } MP = \text{многоуг. } GHIK : \text{многоуг. } QRST$  (159) и круг.  $MP = \text{многоуг. } QRST$  (165). И такъ конусъ  $AMP = \text{прд. } FQRST$  (438). Но конусъ  $ABD = \text{прд. } FGIK$  по положенію; чего ради, отнявъ равные отъ равныхъ, будетъ усѣч. конусъ  $BDMF = \text{усѣч. прд. } GHIKQRST$ .

490. *Присовок.* Отсюда явствуется, что усѣченный конусъ также равенъ цѣлой пирамидѣ, у которой основаніе равняется вмѣстѣ взятымъ основаніямъ сего конуса, съ площадью среднею пропорціональною между ими, а высота таже, что и высота сего конуса (404).

*Примѣч.* Доказанное въ семъ предложеніи удобно приложено быть можетъ и къ цилиндру; ибо если въ усѣченномъ конусѣ положится верхнее основаніе равнымъ нижнему: то найдется, что цилиндръ равенъ призмѣ, у коей основаніе и высота равны основанію и высотѣ оного. Впрочемъ, для изъясненной въ примѣчаніи къ 473-му члену причины, докажемъ сіе и другія, къ сему относящіеся предложенія, непосредственно.

491. *Предложеніе XV.* А. Избытокъ призмъ, описываемыхъ около цилиндра трезъ удвоеніе числа сторонъ, предъ соразвѣстными призмами, подобно первымъ въ толи цилиндръ описываемыми, можетъ сдѣлаться меньше всякой по произволению данной величины.

Черт. 164. Пусть приг-ки  $ABLM$  и  $EFNQ$  стороны вписанной въ цилиндръ  $ATMV$  и описав-

ной около него призмы, стоящихъ на правильныхъ многоугольникахъ, и пусть призма  $ADXM$  и  $RSZT$  стороны шаковыхъ же призмы, вдвое больше сторонъ имѣющихъ. Сдѣлавъ подобное положеніе, какое сдѣлано въ предложеніи XI (485), найдемъ, что и доказательство даннаго предложенія отъ изложеннаго тамъ разнствовать не будетъ (485).

*Примѣт.* Здѣсь подобныя имѣють мѣсто присовокупленія, какія сдѣланы къ тому же предложенію XI (484 и 485).

492. *Предложеніе XVI.* Цилиндръ есть предѣлъ призмъ, вписываемыхъ въ немъ или описываемыхъ около него чрезъ удвоеніе числа сторонъ сихъ.

Сіе предложеніе докажется также, какъ доказано предложеніе XII (486).

493. *Присовок.* Подобнымъ образомъ, какъ доказано присовокупленіе къ оному предложенію XII (487), докажется, что и призма, коей основаніе равно основанію цилиндра и высота равна высотѣ онаго, есть предѣлъ тѣхъ же самыхъ призмъ (491).

494. *Предложеніе XVII.* Цилиндръ  $(ABCD)$  Черт. 168. равенъ призмѣ  $(HIKLMNOP)$ , которой основаніе  $(HIKL)$  равно основанію  $(AB)$  сего цилиндра и высота  $(MQ)$  равна высотѣ  $(FG)$  онаго.

Пусть въ цилиндрѣ  $ABCD$  вписана призма, имѣющая основаніемъ какой нѣ есть правильный многоугольникъ; потомъ чрезъ удвоеніе числа сторонъ другая, и такъ далѣе; цилиндръ  $ABCD$  и призма  $HIKLMNOP$  будутъ предѣлы сихъ призмъ (492 и 493) и слѣдов. равны между собою (503).

*Примѣт.* Послѣ предложеній XIII и сего XVII доказательство слѣдующихъ пяти предло-

жений, относящихся до конусовъ и цилиндровъ, сами собою должны представившись; поему оныя и не предлагаются.

495. Предложеніе XVIII. Конусы и цилиндры, стоящіе на равныхъ основаніяхъ и имѣющіе равныя высоты, суть равны между собою. (488 и 599; 494 и 591).

496. Присовок. Конусы и цилиндры, стоящіе на равныхъ основаніяхъ и имѣющіе равныя высоты, равны между собою только одною величиною; совершенно же они равны тогда, когда оси ихъ равны и имѣютъ равныя углы наклоненія къ равнымъ ихъ основаніямъ.

Равенство сіе докажется непосредственно чрезъ наложеніе.

497. Предложеніе XIX. Усѣченные конусы, произшедшіе отъ разсѣченія цѣлыхъ, стоящихъ на равныхъ основаніяхъ и имѣющихъ равныя высоты, плоскостями, параллельными силѣ равнымъ основаніямъ и отъ нихъ равно отстоящими, суть равны между собою. (495 и 489).

498. Предложеніе XX. Конусъ есть третья часть цилиндра, стоящаго на основаніи, равномъ основанію конуса, и имѣющаго высоту, равную высотѣ оного. (488, 494 и 402).

499. Предложеніе XXI. Конусы и цилиндры, имѣющіе равныя высоты, относятся между собою, какъ основанія; или: стоящіе на равныхъ основаніяхъ, какъ высоты. (488, 494 и 420).

500. Предложеніе XVII. Конусы и цилиндры, коихъ основанія съ высотами въ обратномъ порядкѣ составляютъ пропорцію, суть равны между собою. И обратно: у рав-

ныхъ конусовъ и цилиндровъ основанія съ высотами въ обратномъ порядкѣ составляютъ пропорцію. (483, 494 и 425).

501. Предложеніе XXIII. Конусы ( $ABD$  Черт. 169. и  $FGI$ ) и цилиндры ( $BDLM$  и  $GINO$ ), конхъ оси ( $AC$  и  $FH$ ) имѣютъ равныя углы наклоненія къ основаніямъ ( $BPDQ$  и  $GRIS$ ) и пропорціональны радіусамъ ( $BC$  и  $GH$ ) оныхъ, суть въ отношеніи кубовъ изъ сихъ линий.

1.) Въ случаѣ конусовъ  $ABD$  и  $FGI$  изъ вершинъ  $A$  и  $F$  опустити на основанія ихъ перпендикуляры  $AE$  и  $FK$  (326) и провести чрезъ  $E$  и  $K$  діаметры  $BD$  и  $GI$ ; пусть въ основ-хъ  $BPDQ$  и  $GRIS$  отъ точекъ  $B$  и  $G$  вписаны какіе нисетъ правильныя, равномногія стороны имѣющіе, многоуг-ки  $BPDQ$  и  $GRIS$ ; проводи прямыя  $AB$ ,  $AP$ ,  $AD$ ,  $AQ$  и  $FG$ ,  $FR$ ,  $FI$ ,  $FS$ ; чрезъ что получишь въ конусахъ  $ABD$  и  $FGI$  вписанныя прд.  $ABPDQ$  и  $FGRI$  (457). Сія пирамиды, говорю, подобны и суть въ отношеніи кубовъ изъ радіусовъ  $BC$  и  $GH$  или изъ осей  $AC$  и  $FH$ .

Въ самомъ дѣлѣ опъ центровъ  $C$  и  $H$  проводи прямыя  $CP$  и  $CQ$ ,  $HR$  и  $HS$ ; найдешь, что въ прд-хъ  $ACBQ$  и  $FHCS$ , уг.  $ACE =$  уг.  $FHK$  и уг.  $ACB =$  уг.  $FHC$ ; ибо углы наклоненія осей  $AC$  и  $FH$  къ основ-мъ  $BPDQ$  и  $GRIS$  суть равныя по положенію; уг.  $BCQ =$  уг.  $GHS$ , какъ равночасныя четырехъ прямыхъ (147), и треуг.  $BQC$  подобенъ треуг.  $GSH$  (83 и 205); также плоскости  $BCA$  и  $GHF$ , проходящія чрезъ перпендикуляры  $AE$  и  $FK$ , суть перпендикулярны къ основаніямъ  $BPDQ$  и  $GRIS$  (557): посему углы наклоненія ихъ къ симъ самымъ основаніямъ, какъ прямые, равны между собою (55); чего

ради ш. уг.  $CBQA =$  ш. уг.  $HCSF$  (349); и какъ  
сверхъ того  $AC: FH = BC: GH$  по положенію,  
то прд.  $ACBQ$  подобна прд.  $FHGS$  (430). Такъ  
же докажется, что прм-ды  $ACDQ$ ,  $ACDP$  и  
 $ACPB$  подобны прдм-ъ  $FHIS$ ,  $FHIR$  и  $FHRC$ ,  
каждая каждой; почему прм-ды  $ABPDQ$  и  
 $FGRIS$ , кои состоятъ изъ сихъ подобныхъ  
пирамидъ и въ коихъ ш. уг.  $BA PQ =$  ш. уг.  
 $FGRS$  (351) и  $AB: FG = BP: GR$  или  $= BQ: GS$   
(429), суть подобны (430) и поному прд.  
 $ABPDQ$ : прд.  $FGRIS$  ( $=$  куб.  $BQ: \text{куб. } GS$  (437))  
 $=$  куб.  $BC: \text{куб. } GH$ , или  $=$  куб.  $AC: \text{куб. } FH$   
(159), ибо  $BC: GH$  ( $= BQ: GS$  (203))  $= AC: FH$   
по положенію. Но конусы  $ABD$  и  $FGI$  суть  
предѣлы сихъ и другихъ, чрезъ удвоеніе чи-  
сла сторонъ вписываемыхъ въ нихъ подоб-  
ныхъ пирамидъ (486); слѣдов. и проч. (504).

2) Конусъ есть претвя часть цилиндра, имѣющаго съ нимъ одинаковыя основаніе и высоту (498); чего ради предложеніе сіе явствуетъ и въ случаѣ цилиндровъ (160).

502. *Присовок.* Конусы или цилиндры, у коихъ оси имѣють равныя углы наклоенія къ основаніямъ и пропорціональны радіусамъ оныхъ, суть въ отношеніи кубовъ и изъ высотъ ихъ. (437, 436, 492 и 504).

503. *Предложеніе XXIV.* Если конусы, коихъ оси имѣють равныя углы наклоенія къ основаніямъ и суть пропорціональны радіусамъ оныхъ, разсѣкнутся плоскостями, параллельными симъ основаніямъ, такъ, что оси конусовъ будутъ разсѣчены подобно: то произшедшіе отъ того усѣченные конусы будутъ въ отношеніи кубовъ изъ ихъ осей и изъ радіусовъ ихъ основаній.

Ибо части цѣлыхъ конусовъ, которыя  
опианы отъ нихъ для полученія усѣчен-  
ныхъ конусовъ, суть цѣлые же конусы, ко-  
ихъ оси имѣють равныя углы наклоненія  
и пропорціональны радіусамъ ихъ основа-  
ній (542, 181 и 159); чего ради предложе-  
ніе сіе изъ первой части предъидущаго пред-  
ложенія само собою явствуетъ (501, 159,  
159 и 170).

## КНИГИ ЧЕТВЕРТОЙ ГЛАВА II.

### О сферѣ или шарѣ.

Главу сію, для яснѣйшаго представленія изла-  
гаемыхъ въ ней предметовъ, можно раздѣлить на  
три отдѣленія: 1) на отдѣленіе собственно о пря-  
мыхъ линіяхъ и плоскостяхъ, съ поверхностію ша-  
ра сопряженныхъ; 2) на отдѣленіе о вписанныхъ  
въ шаръ и описанныхъ около него тѣлахъ, содер-  
жимыхъ поверхностями прямыхъ конусовъ; и 3)  
на отдѣленіе о сравненіи поверхности шара съ  
кругомъ и самаго шара съ конусомъ или цилинд-  
ромъ и о взаимномъ отношеніи, каковое поверхно-  
сти шаровъ и самые шары имѣють между собою.

## ГЛАВЫ II-й ОТДѢЛЕНИЕ I-е.

504. *Опредѣленіе I.* Если одна изъ по- Черт. 170.  
ловишь (ADB) круга (ADBE) около діаметра

его ( $AB$ ), приемлемого за неподвижный, совершивъ цѣлое обращеніе: по полуокружности онаго полукруга опишемъ поверхность ( $ADBENFGI$ ), которая сферическою называется; определенное же пространство, содержаемое сего поверхностью, сферою или шаромъ именуется.

505. *Присовок.* Точка  $C$ , изъ коей проведенныя прямыя  $CA$ ,  $CB$ ,  $CD$ ,  $CE$ ,  $CF$ ,  $CG$ ,  $CH$ ,  $CI$  до поверхности шара  $ADBENFGI$  всѣ суть равны между собою, центромъ онаго называется; а каждая изъ сихъ равныхъ радиусомъ его именуется.

Черт. 171. 506. *Предложеніе I.* А. Даннаго шара ( $ABC$ ) центрѣ найти.

Возми на поверхности шара  $ABC$  какія ни есть три точки  $D$ ,  $E$  и  $F$ ; потомъ, описавъ чрезъ нихъ кругъ (295), изъ центра его  $G$  на плоскости  $DEF$  поставь перпендикуляръ  $GA$  (322), продолжи оный въ ту и другую сторону до пресѣченія съ поверхностью шара въ точкахъ  $A$  и  $H$  и раздѣли прямую  $AH$  въ  $I$  пополамъ (58); точка сія будетъ центръ шара  $ABC$ .

Если же она, пусть будетъ центръ шара какая нѣсть другая точка  $K$ , которая, какъ то явно, не можетъ находиться на  $AH$  (505). Въ кругъ  $DEF$  проводи діаметры  $EGL$  и  $FGM$ , также проводи прямыя  $KG$ ,  $KE$ ,  $KF$ ,  $KL$  и  $KM$ ; найдешь, что въ треугольн.  $KGM$  и  $KGF$ ,  $KM = KF$ , какъ радиусы шара,  $GM = GF$ , какъ радиусы круга  $DEF$ , и  $KG$  общая; посему  $\angle KGM = \angle KGF$  (47). Также докажется, что  $\angle KGL = \angle KGE$ . И такъ  $KG$  перпендикулярна къ  $EL$  и  $FM$  (34) и слѣдов. перпендикулярна къ плоско-

спии  $DEF$  (520); что невозможно (525). Слѣдов. точка  $I$  есть центръ шара  $ABC$ .

507. *Присовок.* Отсюда явствуетъ, что перпендикуляръ, поставленный изъ центра круга, проходящаго чрезъ какія вѣсть три точки поверхности шара, проходитъ чрезъ центръ сего послѣдняго (525); а опущенный изъ центра шара на шаковый кругъ падаетъ въ центръ его (527).

Отсюда же происходитъ слѣдующее опредѣленіе:

508. *Опредѣленіе II.* Всякая прямая, проходящая чрезъ центръ шара и ограниченная съ обѣихъ сторонъ его поверхностію, называется *діаметромъ* шара.

509. *Присовок.* Въ шарѣ всѣ радіусы равны; посему и всѣ діаметры онаго равны между собою (147).

510. *Предложеніе II.* Какъ бы шаръ ( $ABC$ ) ни разсѣтенъ былъ плоскостію, происшедшее отъ того сѣченіе ( $ACD$ ) всегда будетъ кругъ.

Плоскості сѣченія шара или проходитъ чрезъ центръ его, или не проходитъ.

1) Пусть плоскості сѣченія  $ACD$  шара No 1.  $ABC$  проходитъ чрезъ центръ его  $F$ ; явно, что она есть кругъ (25).

2) Пусть плоскості сѣченія  $ACD$  шара No 2.  $ABC$  не проходитъ чрезъ центръ его. Найди центръ шара  $F$  (506) и изъ  $F$  опуски на плоскості  $ACD$  перпендикуляръ  $FG$  (526); отъ  $C$ , въ сей плоскості, проводи до линіи  $ACD$ , соединяющей взаимное сѣченіе плоскості  $ACD$  съ поверхностію шара (3), прямыя  $GA$  и  $GD$ ; также проводи радіусы  $FA$  и  $FD$ ; найдешь, что въ прямихъ треуг.  $FGA$  и  $FGD$ ,  $GA = GD$  (49). Подобнымъ образомъ докажется, что и всѣ прямыя, проведенныя

отъ  $C$  до линіи  $ACD$ ; сѣчь взаимно равны между собою; слѣдов. плоскость сѣченія  $ACD$  есть кругъ. (25).

Отсюда происходятъ слѣдующія опредѣленія:

511. *Опредѣленіе III.* Кругъ шара, который проходитъ чрезъ центръ его, называется *большимъ кругомъ* шара; а шось, который не проходитъ чрезъ оный, именуется *малымъ кругомъ* шара.

512. *Опредѣленіе IV.* Всякая часть шара, охватываемая малымъ его кругомъ, называется *сѣченіемъ* шара; а часть поверхности шара, содержащая въ маломъ кругомъ сегментъ сей, именуется *поверхностію* оного.

513. *Примѣчаніе.* Малый кругъ называется *основаніемъ* сегмента шара; часть же діаметра, перпендикулярная къ сему основанію и содержащаяся между имъ и поверхностію сегмента, *осью* или *высотой* его называется.

514. *Опредѣленіе V.* Если на основаніи сегмента шара составится конусъ, имѣющій вершину свою въ центрѣ сего шара: то опредѣленное пространство, содержащее поверхность сегмента шара и поверхность оного конуса, называется *секторомъ* шара; поверхность же упомянутого сегмента шара именуется *основаніемъ* сего сектора шара.

Черт. 173. 515. *Предложеніе III.* Въ шарѣ ( $ABCD$ ) равно отстоящіе отъ центра его ( $E$ ) круги ( $ABF$  и  $CDG$ ) равны между собою. И обратно: равные круги шара равно отстоятъ отъ центра его.

1) Изъ  $E$ , центра шара опуститъ на плоскости круговъ  $ABF$  и  $CDG$  перпендикуляры  $EH$  и  $EI$  (326); они падутъ въ центры  $H$

и  $I$  сихъ круговъ (507). Потомъ проводи радиусы шара  $EA$  и  $ED$  и радиусы круговъ  $HA$  и  $ID$ ; найдешь, что сіи послѣдніе радиусы равны между собою (69); ибо въ прѣм-хъ треуг.  $EHA$  и  $EID$ ,  $EA = ED$ , какъ радиусы шара, и  $EH = EI$  по положенію. Слѣдов. круг.  $ABF =$  круг.  $CDG$  (248).

2) Пустьъ круг.  $ABF =$  круг.  $CDG$ ; сдѣлавъ тоже строеніе, что и въ первомъ случаѣ, найдешь, что  $EH = EI$  (69); ибо въ прѣм-хъ треуг.  $EHA$  и  $EID$ ,  $EA = ED$ , какъ радиусы шара, и  $AH = DI$ , какъ радиусы равныхъ круговъ по положенію. Слѣдов. равные круги равно описываютъ опъ центра.

516. *Опредѣленіе VI.* Когда плоскость Черт. 174. ( $ABCD$ ), встрѣчаясь съ поверхностію шара ( $EFG$ ) въ какой нисешь точкѣ ( $E$ ), прилежнѣ къ ней съ выпуклой ея стороны споль близко, что между плоскостію и поверхностію шара чрезъ точку ихъ встрѣчи ни единой плоскости провести не можно; то оная плоскость ( $ABCD$ ) называется *касательною къ поверхности шара въ той точкѣ ( $E$ )*.

517. *Присовок. 1.* Отсюда явствуетъ, что въ той же точкѣ къ поверхности шара болѣе одной касательной плоскости провести не можно.

518. *Присовок. 2.* Отсюда также явствуетъ, что плоскость  $ABCD$ , проведенная при концѣ радиуса  $EH$  шара  $EFG$  перпендикулярно къ оному, есть касательная къ поверхности оного въ сей точкѣ; ибо какъ плоскость  $ABCD$ , перпендикулярная къ радиусу  $EH$ , такъ и касательная къ поверхности шара  $EFG$ , чрезъ точку  $E$  можетъ быть

проведена только одна (517 и 517); чего ради касательная плоскость, чрезъ сію точку проходящая, совпадаетъ съ плоскостію  $ABCD$  (516); слѣдов. и проч.

519. *Присовокъ 3.* А изъ сего имѣемъ, среденно проводить къ поверхности шара касательную плоскость; что удобно и исполнено быть можетъ (518 и 521).

Въ сообразность съ дѣлмъ порядкомъ, какой наблюденъ во второй книгѣ сихъ Основаній, въ семъ мѣстѣ не неприлично было бы сдѣлать тоже, что сдѣлано во второй главѣ оной, то есть, показать способъ вписыванія въ шаръ и описыванія около него правильныхъ многогранниковъ: ибо шаръ въ разсужденіи ихъ есть тоже, что кругъ въ разсужденіи правильныхъ многоугольниковъ; но поелику правильныхъ многогранниковъ болѣе пяти быть не можетъ (408): то они и не могутъ ни въ разсужденіи сравненія поверхности шара съ кругомъ и самаго шара съ конусомъ или цилиндромъ, ни въ разсужденіи опредѣленія отношенія, каковое поверхности шаровъ и самые шары имѣютъ между собою, нести насъ къ подобнымъ заключеніямъ, къ каковымъ привелъ правильные многоугольники въ разсужденіи сравненія круга съ прямолинейнымъ пространствомъ и въ разсужденіи опредѣленія отношенія между кругами и ихъ окружностями; чего ради вписываніе въ шаръ и описываніе около него правильныхъ многогранниковъ, для краткости, оставлены въ сихъ Основаніяхъ безъ разсмотрѣнія; а вмѣсто сего составлено слѣдующее II-е отдѣленіе о вписанныхъ въ шаръ и описанныхъ около него тѣлахъ, содержимыхъ поверхностями прямихъ конусовъ. Впрочемъ желающій знать, какимъ образомъ вписываются въ шаръ и описываются около него правильные многогранники, можетъ читать о семъ въ Основаніяхъ Геометріи Г. Гурьева стран. 596—618, или въ Опытѣ его о усовершеніи Елементовъ Геометріи стран. 247—264. И такъ

## ГЛАВЫ II-й ОТДѢЛЕНІЕ II-е.



520. Предложеніе IV. Если въ одной Черт. 175.  
изъ большихъ круговъ шара (ADCK) опишется  
какой нибудь правильный многоугольникъ  
(ABCDEFGHJKLM), коего всѣ стороны помѣ-  
щаются въ тетвертяхъ (AND, DNG, GNK и  
KNL) сего круга безъ остатка, и около того  
же круга опишется другой подобный пра-  
вильный многоугольникъ (OPQRSTUVWXYZVW):  
то чрезъ обращеніе половины (ABCDEFGH)  
перваго правильного многоугольника опишет-  
ся въ самомъ шарѣ тѣло, коего поверхность  
будетъ равна кругу, имѣющему радіусомъ  
срединою пропорціональную между двукрат-  
ною высотой онѣ центра (NA) сего правиль-  
наго многоугольника и діаметромъ (AG) ша-  
ра; а чрезъ обращеніе половины (OPQRSTU)  
другаго правильного многоугольника опишет-  
ся около самаго шара другое тѣло, коего по-  
верхность будетъ равна кругу, имѣющему  
радіусомъ срединою пропорціональную между  
двукратнымъ радіусомъ (NP), или діамет-  
ромъ (AG) шара и діаметромъ (OU) круга,  
описаннаго около сего другаго правильного  
многоугольника.

1.) Проведи прямыя BM, CL, EI и FH,  
пресѣкающіяся съ діаметромъ AG въ точ-  
кахъ Г, Д, Е и З; усмотришь, что онѣ къ  
діаметру AG перпендикулярны (217) и по-  
тому между собою параллельны (74) и что  
сторонами АВ, ВС, CD, DE, EF и FG поло-  
винныя правильного многоуг. ABCDEFGHIJKLM,  
чрезъ обращеніе оной около діаметра AG,

вписанная въ самый шаръ прямые конусы, изъ коихъ первый и послѣдній будутъ цѣлые (441), а прочіе всѣ усѣченные (446). Потомъ проводи прямую  $BC$ , сыщи между  $BC$  и  $AG$ ,  $BC$  и  $GD$ ,  $BC$  и  $\Delta N$ , среднія пропорціональныя  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , (181) и опиши ими круги, изъ коихъ первый пусть  $= M$ , другій  $= N$ , третій  $= O$ , и такъ далѣе; также сыщи между  $BC$  и  $AD$ ,  $BC$  и  $AN$ , среднія пропорціональныя  $C$ ,  $H$ , (187) и опиши ими круги, изъ коихъ первый пусть  $= S$  и другій  $= T$ , и такъ далѣе; потомъ опиши прямую  $BC$  кругъ, который пусть  $= Z$ ; найдешь, что уг.  $ABC$  есть прямой (259),  $BC$  прл-на  $NA$  (74) и двукратна какъ сей (101), такъ и всѣхъ перпендикуляровъ, проведенныхъ изъ срединъ сторонъ  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и такъ далѣе, равныхъ (225) между собою и вслѣдующихся въ центръ шара (217). Но круги  $M$ ,  $N$ ,  $O$  равняются поверхностямъ, описаннымъ сторонами  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  (469 и 472); круг.  $Z$ : круг.  $M = \text{кдр. } \overline{BC}: \text{кдр. } \overline{A} (= \text{прмг. } \overline{BC}, \overline{AG}) = BC: AG$ , круг.  $Z$ : круг.  $N = \text{кдр. } \overline{BC}: \text{кдр. } \overline{B} (= \text{прмг. } \overline{BC}, \overline{GD}) = BC: GD$  (313, 195 и 191) и круг.  $Z$ : круг.  $M + \text{круг. } N = BC: AG + GD$  (170); также круг.  $Z$ : круг.  $S = \text{кдр. } \overline{BC}: \text{кдр. } \overline{G} (= \text{прмг. } \overline{BC}, \overline{AD}) = BC: AD$ ; чего ради круг.  $M + \text{круг. } N = \text{круг. } S$  (166), то есть, поверхность, описанная сторонами  $AB$  и  $BC$ , или все то же, ломаную  $ABC$ , равняется кругу, описанному среднею пропорціональною  $G$  между  $BC$  и  $AD$ . Потомъ круг.  $Z$ : кругъ  $O (= \text{кдр. } \overline{BC}: \text{кдр. } \overline{C}) = BC: \Delta N$ , круг.  $Z$ : круг.  $S = BC: AD$

и круг.  $Z$ : круг.  $S +$  круг.  $O = BG: AD + AN$ ; но и круг.  $Z$ : круг.  $T (= \text{вдр. } \overline{BG}: \text{вдр. } \overline{H}) = BG: AN$ ; чего ради круг  $S +$  круг.  $O =$  круг.  $T$  (166), то есть, поверхность, описанная прямиа сторонами  $AB$ ,  $BC$  и  $CD$ , или все тоже, ломаню  $ABCD$ , равняется кругу  $T$ , описанному среднею пропорціональною  $H$  между  $BG$  и  $AN$ ; и такъ далѣе. Изъ чего и явствуешь, что поверхность вписаннаго въ шаръ  $ADCK$  тѣла, содержамаго поверхностями прямыхъ конусовъ, равняется кругу, коего радіусъ есть средняя пропорціональная между двукратною высокою отъ центра  $2 NA (= BG)$  правильнаго многоугольника, извѣстнымъ образомъ въ большемъ кругѣ шара вписаннаго, и діаметромъ  $AG$  сего шара.

2) Сверхъ предъидущаго строенія проведи еще прямую  $PU$ ; рассуждая подобнымъ образомъ, какъ рассуждали въ первой части сего предложенія, найдемъ, что прямая  $PU$  есть двукратна высоты отъ центра  $N$  правильнаго многоуг.  $OPQRSTUXYZW$ , или все тоже, радіуса шара  $ADCK$ ; и потомъ, сдѣлавъ подобныя предположенія, каковыя сдѣлали въ оной части, достигнемъ до подобнаго заключенія, то есть, что поверхность извѣстнымъ образомъ описаннаго около шара  $ADCK$  тѣла, содержамаго поверхностями прямыхъ конусовъ, равняется кругу, коего радіусъ есть средняя пропорціональная между двукратнымъ радіусомъ  $2 NP (= PU)$  или діаметромъ  $AG$  сего шара и діаметромъ  $OU$  круга, описаннаго около правильнаго многоуг.  $OPQRSTUXYZW$ .

521. *Присовок.* Опикуда слѣдуетъ, что поверхности вписаннаго въ шаръ  $ADCK$  и описаннаго около него шѣлъ суть въ отношеніи квадратовъ изъ высотъ отъ центра  $NA$  и  $NP$  правильныхъ многоугольниковъ  $ABCDEFGHIKLM$  и  $OPQRSTUVWXYZVW$ , полыми своими шѣла сіи произведшихъ.

Пусть  $K$  и  $L$  среднія пропорціональныя между  $BG$  и  $AG$  и между  $PU$  и  $OU$  и пусть круги  $X$  и  $Y$ , описанные сими средними пропорціональными и потому равные поверхностямъ оныхъ шѣлъ (520); будетъ круг.  $X$ : круг.  $Y$  ( $=$  кдр.  $\overline{K}$ : кдр.  $\overline{L}$ )  $=$  прмг.  $\overline{BG}$ ,  $\overline{AG}$ : прмг.  $\overline{PU}$ ,  $\overline{OU}$  (515 и 195). Но въ треуг-хъ  $ABG$  и  $OPU$  уг.  $ABG =$  уг.  $OPU$ , какъ каждый прямой (259), и уг.  $BAG =$  уг.  $POU$  (77); посему  $BG: AG = PU: OU$  (205) и кдр.  $\overline{BG}$ : прмг.  $\overline{BG}$ ,  $\overline{AG} =$  кдр.  $\overline{PU}$ : прмг.  $\overline{PU}$ ,  $\overline{OU}$  (191 и 159). И такъ кругъ  $X$ : круг.  $Y =$  кдр.  $\overline{BG}$ : кдр.  $\overline{PU} = 4$  кдр.  $\overline{NA}$ : 4 кдр.  $\overline{NP} =$  кдр.  $\overline{NA}$ : кдр.  $\overline{NP}$  (169, 126 и 160).

Черт. 176.

522. *Предложеніе V. Л.* Если какой нѣсть треугольникъ ( $ABC$ ) около одной изъ сторонъ своихъ (какъ  $AC$ ), приемлемой за неподвижную, совершитъ цѣлое обращеніе: то произшедшее шѣло будетъ равно конусу, коего основаніе кругъ равный поверхности, описанной одною изъ прочихъ сторонъ (какъ  $AB$ ) сего треугольника, а высота перпендикуляръ ( $CF$ ), опущенный на сію сторону ( $AB$ ) изъ вершины ( $C$ ) противолежащаго ей угла ( $ACB$ ).

Но 1 и 2.

На неподвижную сторону  $AC$ , если нужно продолженную, опуститъ перпендикуляръ  $BD$  (59) и поставь другой  $CE = BD$  (51); по-

потомъ, проведи прямую  $AE$ ; означивъ конусы, произведенные чрезъ обращеніе около  $AC$  прям.-ми треуг.  $ABD$ ,  $CBD$  и  $AEC$  чрезъ  $P$ ,  $Q$  и  $R$ , найдешь, что  $P:R=AD:AC$ ,  $Q:R=CD:AC$  (499) и  $P \pm Q:R=AD \pm CD:AC$  (170); почему  $P \pm Q=R$  (162), то есть, шло, произведенное треуг.  $ABC$ , равно конусу  $R$ . Потомъ въ треуг.-хъ  $ABD$  и  $ACF$ , уг.  $BAC$  общій и уг.  $ADB=уг. AFC$ , какъ каждый прямой; чего ради  $AB:BD=AC:CF$  (205). И такъ если поверхности описанныя  $AB$  и  $BD=CE$ , или равные имъ круги, означатся чрезъ  $M$  и  $N$ ; то будетъ круг.  $M$ : круг.  $N (=AB:BD)=AC:CF$  (468 и 159) и конусъ, стоящій на кругѣ  $M$  и имѣющій высоту  $CF$ , равенъ конусу  $R$ , стоящему на кругѣ  $N$  и имѣющему высоту  $AC$  (500). Но сей конусъ  $R$ , какъ выше доказано, равенъ шлу, произведенному треуг.-мъ  $ABC$ ; слѣдов. и проч.

**Примѣч.** Въ доказательствѣ семъ мы полагали углы, лежащіе при неподвижной сторонѣ  $AC$ , или оба острыми или одинъ изъ нихъ острымъ, а другой тупымъ; но предложеніе равно имѣетъ мѣсто, когда одинъ уголъ положится прямымъ, и доказательство въ семъ случаѣ ни чѣмъ почти не будетъ разнѣствовать отъ предъидущаго, кромѣ того, что здѣсь самый треуг.  $ABC$  подобенъ треуг.  $ACF$ . Черт. 177.

525. Предложеніе VI. А. Если какой нибудь треугольникъ ( $ABC$ ) около неподвижной прямой ( $CD$ ), проходящей внѣ его чрезъ вершину ( $C$ ) одного изъ угловъ его ( $ACB$ ) и лежащей по довольномъ продолженіи со противоположно тому углу стороной ( $AB$ ) встѣтается въ какой нибудь точкѣ ( $D$ ), совер-

шнѣмъ цѣлое обращеніе: то произведенное тѣмъ треугольникомъ тѣло будетъ равно конусу, коего основаніе кругъ равный поверхности, описанной одною стороною ( $AB$ ), а высота перпендикуляръ ( $CF$ ), опущенный на сію сторону изъ вершины ( $C$ ) того угла.

Но 1 и 2. Пусть  $AB$  встрѣчается съ  $CD$  въ точкѣ  $D$ . Означимъ круги равные поверхностямъ, описаннымъ прямыми  $BD$ ,  $AD$  и  $AB$  чрезъ  $M$ ,  $N$  и  $O$ ; и пусть  $P$ ,  $Q$  и  $R$  конусы, стоящіе на сихъ кругахъ и имѣющіе высоты равныя перпендикуляру  $CF$ ; будетъ круг.  $O$  = круг.  $M$  — круг.  $N$  и тѣло, произведенное треуг.  $ABC$ , = конус.  $P$  — конус.  $Q$  (522); но конус.  $P$ : конус.  $R$  = круг.  $M$ : круг.  $O$  и конус.  $Q$ : конус.  $R$  = круг.  $N$ : круг.  $O$  (499); чего ради конус.  $P$  — конус.  $Q$ : конус.  $R$  = круг.  $M$  — круг.  $N$ : круг.  $O$  (170) и конус.  $P$  — конус.  $Q$  = конус.  $R$  (162); слѣдов. и проч.

524. Предложеніе VII. Если вышепоказаннымъ образомъ трезъ обращеніе половины (ABCDEFG) правильного многоугольника (ABCDEFGHJKLM), вписаннаго въ большій кругъ шара ( $ADGK$ ), впишется въ самый шаръ тѣло и трезъ обращеніе половины (OPQRSTU) правильного многоугольника (OPQRSTUWXYZVW), описаннаго около того же большаго круга шара, опишется около самаго шара другое тѣло: то первое тѣло будетъ равно конусу, коего основаніе кругъ равный поверхности сего тѣла, а высота равная высотѣ отъ центра ( $NA$ ) вписаннаго правильнаго оного многоугольника; другое же тѣло равно будетъ конусу, коего основаніе кругъ равный поверхности сего тѣла, а высота равная радиусу ( $NA$ ) шара, или все то же, вы-

Черт. 175.

сѣтъ отъ центра (NII) описаннаго правильнаго многоугольника.

г.) По проведеніи радіусовъ  $NB$ ,  $NC$ , и такъ далѣе, означимъ круги равные поверхностямъ, описаннымъ сторонами  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ , и такъ далѣе, чрезъ  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , и такъ далѣе, а конусы, имѣющіе сіи круги основаніями и высоты  $= NA$ , чрезъ  $M$ ,  $N$ ,  $O$ , и такъ далѣе; также означимъ круги равные поверхностямъ, описаннымъ ломаными  $ABC$ ,  $ABCD$ , и такъ далѣе, чрезъ  $G$ ,  $H$ , и такъ далѣе, а конусы, имѣющіе сіи круги основаніями и высоты  $= NA$ , чрезъ  $S$ ,  $T$ , и такъ далѣе; найдемъ, что шѣла, произведенныя обращеніемъ треуг-въ  $ABN$ ,  $BCN$ ,  $CDN$ , и такъ далѣе, около діаметра  $AG$ , суть равны конусамъ  $M$ ,  $N$ ,  $O$ , и такъ далѣе (522 и 523). Но конус.  $S$ : конус.  $M =$  круг.  $G$ : круг.  $A$  и конус.  $S$ : конус.  $N =$  круг.  $G$ : круг.  $B$  (499); чего ради конус.  $S$ : конус.  $M +$  конус.  $N =$  круг.  $G$ : круг.  $A +$  круг.  $B$  (170) и конус.  $M +$  конус.  $N =$  конус.  $S$  (160), ибо круг.  $A +$  круг.  $B =$  круг.  $G$  (520); слѣдов. шѣло, произведенное многоуг.  $ABCN$ , равняется вмѣстѣ взятымъ шѣламъ произведеннымъ треуг-ми  $ABN$  и  $BCN$ . Потомъ конус.  $T$ : конус.  $S =$  круг.  $H$ : круг.  $G$  и конус.  $T$ : конус.  $O =$  круг.  $H$ : круг.  $C$  (499); чего ради конус.  $T$ : конус.  $S +$  конус.  $O =$  круг.  $H$ : круг.  $G +$  круг.  $C$  (170) и конус.  $S +$  конус.  $O =$  конус.  $T$  (160), ибо круг.  $G +$  круг.  $C =$  круг.  $H$  (520); слѣдов. шѣло, произведенное многоуг.  $ABCDN$ , равняется вмѣстѣ взятымъ шѣламъ, произведеннымъ многоуг.  $ABCN$  и треуг.  $CDN$ ; и такъ далѣе. Изъ чего и явствуетъ, что вышесказаннымъ образомъ (520) вписанное

въ шарѣ  $ADCK$  тѣло равняется конусу, коего основаніе кругъ равный поверхности сего тѣла, а высота равная высотѣ отъ центра  $NA$  правильнаго многоугольника, вписаннаго въ большіе кругъ шара и половиною своею оное тѣло произведшаго.

2.) Сдѣлавъ подобныя предположенія, каковыя сдѣлали въ первой части сего предположенія, и рассуждая подобнымъ образомъ, какъ рассуждали въ оной, достигнемъ до подобнаго заключенія, то есть, что вышепоказаннымъ образомъ (520) описанное около шара  $ADCK$  тѣло равняется конусу, коего основаніе кругъ равный поверхности сего тѣла, а высота равная радіусу  $NA$  шара, или все шѣже, высотѣ отъ центра  $NP$  правильнаго многоугольника, описаннаго около большаго круга шара и половиною своею оное тѣло произведшаго.

525. *Присовок.* Откуда слѣдуетъ, что тѣла сіи суть въ отношеніи кубовъ изъ высотъ отъ центра  $NA$  и  $NP$  правильныхъ многоуг.  $ABCDEFGHJKLM$  и  $OPQRSTUVWXYZVW$ , половиннами своими произведшихъ оныя.

Пусть равныя поверхностямъ сихъ тѣлъ круги  $X$  и  $Y$ , описанные радіусами  $\Gamma$  и  $\Delta$  и пусть  $Z$  и  $V$  прямые конусы, стоящіе на сихъ кругахъ  $X$  и  $Y$  и имѣющіе высоты  $NA$  и  $NP$ ; будетъ круг.  $X$ : круг.  $Y = \text{вдр. } NA: \text{вдр. } NP$  (521) и круг.  $X$ : круг.  $Y = \text{вдр. } \Gamma: \text{вдр. } \Delta$  (515); почему вдр.  $NA: \text{вдр. } NP = \text{вдр. } \Gamma: \text{вдр. } \Delta$  (159) и  $NA: NP = \Gamma: \Delta$  (159). И такъ оси  $NA$  и  $NP$  прямыхъ конусовъ  $Z$  и  $V$  имѣють, къ плоскостямъ ихъ основаній  $X$  и  $Y$  углы наклоенія равные и

пропорціональны радіусамъ  $\Gamma$  и  $\Delta$  оныхъ; чего ради конус.  $Z$ : конус.  $K = \text{куб. } \overline{\Gamma} : \text{куб. } \overline{\Delta} = \text{куб. } \overline{NA} : \text{куб. } \overline{N\Pi}$  (501); слѣдов. и проч.

## ГЛАВЫ II-й ОТДѢЛЕНИЕ III-е.

526. Предложеніе VIII. Л. Избытокъ поверхностей тѣлъ описываемыхъ около шара чрезъ обращеніе половины правильныхъ многоугольниковъ, описываемыхъ чрезъ удвоеніе тѣла сторонъ ихъ около одного изъ большихъ круговъ онаго, предъ поверхностями тѣлъ, подобно первымъ вписываемыхъ въ томъ же шарѣ, можетъ сдѣлаться меньше всякой по произволению данной величины.

Пусть  $AB$  сторона правильнаго многоугольника, извѣстнымъ образомъ (520) вписаннаго въ большемъ кругѣ шара  $ABNV$  и  $EF$  сторона многоугольника, подобно первому около того же круга описаннаго; и пусть еще стороны  $AD$  и  $KS$  таковыхъ же многоугольниковъ, вдвое больше сторонъ имѣющихъ. Означимъ поверхность вписаннаго въ шаръ тѣла чрезъ обращеніе половины многоугольника, коего сторона  $AD$ , буквою  $P$  и поверхность описаннаго около шара тѣла чрезъ обращеніе половины многоугольника, коего сторона есть  $RS$ , буквою  $Q$ ; будетъ  $Q : P = \text{кдр. } \overline{OH} : \text{кдр. } \overline{OC}$  (521); и какъ  $\text{кдр. } \overline{OH} : \text{кдр. } \overline{OC} (= \text{кдр. } \overline{RS} : \text{кдр. } \overline{AD}) = \overline{OD} : \overline{OK}$  (290, 291, и 139); то  $Q : P = \overline{OD} : \overline{OK}$

Черт. 179.

(159) и  $Q - P: Q = OD - OK: OD$  (170). Но  $DK (= OD - OK)$ , отъ вписыванія и описыванія правильныхъ многоугольниковъ чрезъ удвоение числа сторонъ въ большемъ кругѣ шара  $ABNF$  и около онаго и слѣдов. отъ вписыванія и описыванія въ шаръ и около него самыхъ шѣлъ, уменьшаясь половиною величины своей (101 или 505), можетъ сдѣлаться меньше всякой по произволению данной величины; чего ради избытокъ поверхностей шѣлъ, извѣстнымъ образомъ описываемыхъ около шара, предъ поверхностями шѣлъ, подобнымъ образомъ въ немъ вписываемыхъ, также можетъ сдѣлаться меньше всякой по произволению данной величины (151 или 165).

527. *Присовок. 1.* Отсюда слѣдуетъ, что избытокъ поверхности шара предъ поверхностями шѣлъ, извѣстнымъ образомъ (520) вписываемыхъ въ немъ, или избытокъ поверхностей шѣлъ, подобнымъ образомъ описываемыхъ около шара, предъ поверхностью его, можетъ сдѣлаться и паче меньше всякой по произволению данной величины.

528. *Присовок. 2.* Поверхность всякаго шѣла, извѣстнымъ образомъ (520) вписаннаго въ шаръ, меньше круга, коюто радіусъ есть діаметръ сего шара, а поверхность всякаго шѣла, подобнымъ образомъ описаннаго около шара, больше тогоже самаго круга (520, 515 и 164); почему отсюда же слѣдуетъ, что избытокъ сего круга предъ поверхностями шѣлъ, извѣстнымъ образомъ вписываемыхъ въ шаръ чрезъ удвоение числа сторонъ многоугольниковъ, ихъ производишель, или избытокъ поверхностей шѣлъ, по-

подобнымъ образомъ описываемыхъ около него, предъ тѣмъ самымъ кругомъ, также можетъ сдѣлаться меньше всякой по произволению данной величины.

529. Предложеніе IX. Поверхность шара есть предѣлъ поверхностей тѣлъ, вписываемыхъ въ селъ шаръ или около него описываемыхъ чрезъ обращеніе половинъ правильныхъ многоугольниковъ, ихъ производителей.

Поверхности тѣлъ, вписываемыхъ въ шаръ или описываемыхъ около него чрезъ обращеніе половинъ правильныхъ многоугольниковъ, вписываемыхъ чрезъ удвоеніе числа сторонъ ихъ въ одномъ изъ большихъ круговъ шара или описываемыхъ около онаго, увеличиваясь или уменьшаясь никогда до поверхности шара не достигаютъ и она пребываетъ непремѣнною; также избытокъ поверхности шара предъ сими увеличивающимися поверхностями, или избытокъ сихъ уменьшающихся поверхностей предъ поверхностью шара можетъ сдѣлаться меньше всякой по произволению данной величины (526); чего ради поверхность шара есть предѣлъ поверхностей сихъ тѣлъ (301).

530. Присовок. 1. Точно также докажется, что и кругъ, коего радіусъ есть діаметръ шара, есть предѣлъ тѣхъ же самыхъ поверхностей (528).

531. Присовок. 2. Если чрезъ обращеніе Черт. 175. половинъ  $ABC$  и  $OPQ$  многоуг-въ  $CBAML$  и  $QPOWV$ , известнымъ образомъ (520) вписаннаго въ сегментъ большаго круга шара  $ADCK$  и описаннаго около него, при удвоеніи числа сторонъ ихъ впишутся въ сегментъ  $CAL$  самаго шара и опишутся около него подоб-

был одинъ другимъ шѣла: то, какъ въ самомъ предложеніи и въ предъидущемъ присовокупленіи къ нему, докажется, что поверхность сегмента  $CAL$  и кругъ, коего радіусъ есть средняя пропорціональная между выскою сего сегмента и діаметромъ шара, суть предѣлы поверхностей оныхъ шѣлъ (520 и 528).

Черт. 180. 532. Предложеніе X. Поверхность шара ( $ADGK$ ) равна кругу, коего радіусъ есть діаметръ ( $AG$ ) сего шара, или все то же, который есть четырехкратный большаго круга ( $ADGK$ ) сего шара.

Въ большемъ кругѣ  $ADGK$  сего шара проведи взаимно перпендикулярные діаметры  $AG$  и  $DK$  (51) и каждый изъ прямыхъ угловъ  $AND$  и  $ANK$  раздѣли на три части (85); продолженными сторонами сихъ новыхъ угловъ насѣкутся на окружности круга равныя дуги (250) и спягивающія ихъ хорды составятъ правильный многоугольникъ (246 и 135), коего стороны въ четвертяхъ сего круга помѣщаются безъ остатка; чрезъ обращеніе половины сего многоугольника вышешся въ самомъ шарѣ шѣло (520); потомъ чрезъ удвоеніе числа сторонъ въ томъ же большемъ кругѣ впиши другой правильный многоугольникъ (287), чрезъ обращеніе половины коего также вышешся въ шарѣ шѣло, и такъ далѣе; найдешь, что поверхность шара и кругъ, коего радіусъ діаметръ сего шара, будутъ предѣлы поверхностей оныхъ шѣлъ (529 и 530) и слѣдов. равны между собою (303).

Пусть поверхность шара  $ADGK$ , или все то же кругъ, коего радіусъ діаметръ

$AG = R$  и больший кругъ сего шара, коего радиусъ  $NA = Q$ ; будетъ кругъ  $P$ : круг.  $Q =$  кдр.  $\overline{AG}$ : кдр.  $\overline{NA} = 4$  кдр.  $\overline{NA}$ : кдр.  $\overline{NA}$  (313 и 126) и круг.  $P = 4$  круг.  $Q$  (163).

553. *Присовок.* Подобнымъ образомъ докажется, что поверхность сегмента  $ACL$  шара  $ADCK$  равняется кругу, коего радиусъ  $AC$  средняя пропорціональная между высотой  $AO$  сегмента и діаметромъ  $AG$  шара (531).

554. *Предложеніе XI.* Поверхности шаровъ ( $ABCD$  и  $FGHI$ ) суть въ отношеніи квад. Черт. 181. *ратовъ* изъ ихъ радиусовъ ( $EA$  и  $KF$ ).

Поверхности шаровъ суть четырехкратны ихъ большихъ круговъ (552), а сіи суть въ отношеніи квадратовъ изъ ихъ радиусовъ (515); чего ради предложеніе явствуется (160).

555. *Присовок.* 1. Поверхности сегментовъ  $ABD$  и  $FGI$  шаровъ  $ABCD$  и  $FGHI$ , у коихъ высоты  $AL$  и  $FM$  пропорціональны радиусамъ  $LB$  и  $MG$  ихъ оснований, суть также въ отношеніи квадратовъ изъ сихъ линий.

Проведи прямыя  $AB$  и  $FG$ ; усмотришь, что въ прим-хъ  $\triangle ABL$  и  $\triangle FGM$ , въ коихъ  $AL:FM = LB:MG$  по положенію, будетъ  $AB:FG = AL:FM = LB:MG$  (206); но поверхности сегментовъ  $ABD$  и  $FGI$  равны кругамъ, коихъ радиусы прямыя  $AB$  и  $FG$  (183 и 553); чего ради поверхности сихъ сегментовъ суть въ отношеніи квадратовъ изъ линий  $AL$  и  $FM$  или  $LB$  и  $MG$  (515, 195 и 159).

556. *Присовок.* 2. Треуг-ки  $ABE$  и  $FGK$  суть подобны (83 и 203); чего ради поверх-

ности тѣхъ же сегментовъ также суть въ отношеніи квадратовъ изъ радіусовъ  $EA$  и  $KF$  шаровъ (159).

557. Предложеніе XII. А. Избытокъ тѣло описываемыхъ около шара чрезъ обращеніе половинъ правильныхъ многоугольниковъ, описываемыхъ чрезъ удвоеніе числа сторонъ ихъ около одного изъ большихъ круговъ его, предъ тѣлами, подобно первымъ вписываемыми въ толибъ же шаръ, можетъ сдѣлаться меньше всякой по произволению данной величины.

Черт. 179.

Пусть  $AB$  сторона правильного многоугольника, извѣстнымъ образомъ (520) вписаннаго въ большемъ кругѣ шара  $ABNV$ , и  $EF$  сторона многоугольника, подобно первому около того же круга описаннаго, и пусть еще стороны  $AD$  и  $RS$  таковыхъ же многоугольниковъ, вдвое больше сторонъ имѣющихъ. Означимъ вписанное въ шаръ тѣло чрезъ обращеніе половины многоугольника, коего сторона  $AD$ , буквою  $S$  и описанное около шара тѣло чрезъ обращеніе многоугольника, коего сторона  $RS$ , буквою  $T$ ; будемъ  $T : S = \text{куб. } \overline{OH} : \text{куб. } \overline{OG}$  (525)  $= \text{куб. } \overline{OD}$ ; прит.  $\overline{OD}, \overline{OK}, \overline{OG} = \text{кдр. } \overline{OD}$ ; прит.  $\overline{OG}, \overline{OK}$ ; ибо  $\overline{OH} = \overline{OD}$  и въ прит-мъ треуг.  $DCO$  кдр.  $\overline{OG} = \text{прит. } \overline{OD}, \overline{OK}$  (195). Проведемъ  $HL$  прямую  $GK$  (75); усмотримъ, что треуг.  $HLO = \text{треуг. } DGO$  и  $OL = OG$  (71); чего ради  $T : S = \text{кдр. } \overline{OD} : \text{прит. } \overline{OL}, \overline{OK}$  и  $T - S : T = \text{кдр. } \overline{OD} - \text{прит. } \overline{OL}, \overline{OK} : \text{кдр. } \overline{OD}$  (170). Поелику же отъ вписыванія и описыванія правильныхъ многоугольниковъ чрезъ удвоеніе числа сто-

расть ихъ въ большемъ кругѣ шара  $ABNK$  и около него и слѣдов. отъ вписыванія и описыванія въ самомъ шарѣ и около онаго шѣлъ. части  $DL$  и  $DK$  радіуса шара уменьшаются первой болѣе, нежели половиною, ибо  $DL < DK$  ( $= \frac{1}{2}CD$ ), а другая половиною величины своей (101 или 305); по слѣдуетъ, что  $OL$  и  $OK$ , по мѣрѣ уменьшенія частей  $DL$  и  $DK$ , будутъ возрастать и припомъ первая болѣе, нежели половиною предъидущаго приращенія, а другая половиною; чего ради и избытокъ кдр.  $\overline{OD}$  предъ прмг.  $\overline{OL}, \overline{OK}$ , при каждомъ уменьшеніи оныхъ частей радіуса, непрестанно будетъ уменьшаться и наконецъ сдѣлается меньше всякой по произволению данной величины. Изъ чего слѣдуетъ, что и избытокъ шѣлъ, извѣстнымъ образомъ вписываемыхъ въ шарѣ, предъ шѣлами подобно первымъ вписываемыми въ томъ же шарѣ, также можетъ сдѣлаться меньше всякой по произволению данной величины.

558. *Присовок. 1.* Отсюда слѣдуетъ, что избытокъ шара предъ шѣлами, извѣстнымъ образомъ вписываемыми въ немъ, или избытокъ шѣлъ, подобно первымъ описываемыхъ около шара, предъ нимъ самимъ можетъ сдѣлаться и паче меньше всякой по произволению данной величины.

559. *Присовок. 2.* Всякое шѣло, извѣстнымъ образомъ (526) вписанное въ шарѣ, какъ равное конусу, коего основаніе кругъ равный поверхности сего шѣла, а высота равная высотѣ отъ центра правильного многоугольника, его производящела (524), меньше конуса, коего основаніе кругъ рав-

ный поверхности шара, а высота радиусъ онаго (495); а всякое тѣло, подобнымъ образомъ описанное около шара, какъ равное конусу, коего основаніе кругъ равный поверхности сего тѣла, а высота радиусъ шара (524), больше того же самаго конуса, коего основаніе кругъ равный поверхности шара, а высота радиусъ онаго (495); почему отсюда явствуетъ, что и избытокъ сего конуса, коего основаніе кругъ равный поверхности шара, а высота радиусъ онаго, предъ тѣлами, извѣстнымъ образомъ вписываемыми въ шаръ, или избытокъ тѣла, подобнымъ образомъ описываемыхъ около того же шара, предъ тѣмъ же самымъ конусомъ также можетъ сдѣлаться меньше всякой по произволению данной величины.

*540. Предложеніе XIII. А. Шаръ есть предѣлъ тѣла, вписываемыхъ въ него или около него описываемыхъ чрезъ обращеніе половинъ правильныхъ многоугольниковъ, ихъ производителей.*

Тѣла извѣстнымъ образомъ (520) вписываемыя въ шаръ или около него описываемыя чрезъ обращеніе половинъ правильныхъ многоугольниковъ, вписываемыхъ чрезъ удвоеніе числа сторонъ въ одномъ изъ большихъ круговъ шара, или описываемыхъ около онаго, увеличиваясь или уменьшаясь, никогда до шара не достигаютъ и оный превышаетъ непрежѣннымъ; также избытокъ шара предъ теми увеличивающимися тѣлами, или избытокъ сихъ уменьшающихся тѣлъ предъ самымъ шаромъ можетъ сдѣлаться меньше всякой по произволению дан-

ной величины (558); чего ради шаръ есть предѣлъ сихъ тѣлъ (501).

541. *Присовок. 1.* Точно также докажется, что и конусъ, коего основаніе кругъ равный поверхности сего шара, а высота радіусъ его, есть предѣлъ тѣхъ же самыхъ тѣлъ (539).

542. *Присовок. 2.* Если чрезъ обращеніе Черт. 171. половинъ  $ABCS$  и  $OPQN$  многоуг-въ  $NCBAML$  и  $NQPOWF$ , известнымъ образомъ (520) вписаннаго въ секторъ большаго круга шара  $ADCK$  и описаннаго около него, при удвоеніи числа сторонъ ихъ впишутся въ секторъ  $NCAL$  самаго шара и опишутся около него подобныя одиѣ другимъ тѣла; то, какъ въ самомъ предложеніи семь и предвидущемъ присовокупленіи къ нему, докажется, что секторъ  $NCAL$  и конусъ, коего основаніе есть кругъ, равный основанію сего сектора, а высота радіусъ шара, суть предѣлы оныхъ тѣлъ (524 и 539).

543. *Предложеніе XIV.* Шаръ ( $ADCK$ ) Черт. 172. равенъ конусу, коего основаніе кругъ равный поверхности шара, а высота радіусъ онаго, или все то же, шаръ есть четырехкратный конуса ( $ADK$ ), коего основаніе большой кругъ ( $DK$ ) шара, а высота радіусъ ( $NA$ ) онаго.

Въ большемъ кругѣ шара впиши (552) какой виесть правильный многоугольникъ, коего стороны въ четвертяхъ сего круга помѣщаются безъ остатка: чрезъ обращеніе половины сего многоугольника впишется въ самый шаръ тѣло (520); потомъ чрезъ удвоеніе числа сторонъ въ томъ же большемъ кругѣ впиши другой правильный многоугольникъ (257): чрезъ обращеніе полови-

ны его также впишется въ самый шаръ тѣло (520), и такъ, далѣе; изъ чего заключить, что шаръ и конусъ, коего основаніе кругъ равный поверхности сего шара, а высота радіусъ его, суть предѣлы оныхъ тѣлъ (540 и 541) и слѣдов. равны между собою (303).

Но поверхность шара есть чепыре-крапна большаго его круга; чего ради конусъ сей и слѣдов. шаръ есть чепырекрапнень конуса, стоящаго на семъ 'большемъ кругѣ и имѣющаго высоту радіусъ шара (495).

544. *Присовок. 1.* Откуда явствуетъ, что полшаръ  $ADK$  есть двѣ трети цилиндра  $DKSR$ , стоящаго на большемъ кругѣ  $DK$  шара  $ADCK$  и имѣющаго высоту радіусъ его  $NA$  (498); чего ради самый шаръ есть двѣ трети цилиндра, стоящаго на большемъ кругѣ шара и имѣющаго высоту діаметръ оного.

545. *Присовок. 2.* Подобнымъ образомъ, какъ самое предложеніе, докажется, что секторъ  $NCAL$  шара  $ADCK$  равняется конусу, коего основаніе кругъ равный поверхности сегмента  $ACL$  шара, которую мы выше назвали основаніемъ сектора (514); или все тоже, коего основаніе кругъ, описанный прямою  $AC$  (555), а высота радіусъ  $NA$  шара (542).

546. *Присовок. 3.* Секторъ  $NCAL$  шара равенъ еще конусу, стоящему на общемъ основаніи  $CL$  составляющихъ его тѣлъ; сегмента  $ACL$  шара и конуса  $NCL$  и имѣющему высоту  $OP$ , равную четвертой пропорціональной къ  $OC$ ,  $AC$  и  $NA$ , тавъ что  $OC: AC = NA: OP$ .

Пусть кругъ  $CL$ , описанный  $OC$ ,  $= M$ , а кругъ, описанный  $AC$ ,  $= N$ ; будетъ кругъ  $M$ : кругъ  $N = \text{кдр. } \overline{OC} : \text{кдр. } \overline{AC} \text{ (515); и какъ кдр. } \overline{OC} = \text{прямг. } \overline{AO}, \overline{OC} \text{ и кдр. } \overline{AC} = \text{прямг. } \overline{AO}, \overline{AC} \text{ (195); то будетъ кругъ } M : \text{кругъ } N = \overline{OC} : \overline{AC} \text{ (191) и кругъ } M : \text{кругъ } N = \overline{NA} : \overline{OP} \text{ (159); чего ради конусъ, стоящій на кругъ } M \text{ (= кругъ } CL) \text{ и имѣющій высоту } \overline{OP}$ , равенъ конусу, стоящему на кругъ  $N$ , описанномъ  $AC$ , и имѣющему высоту радиусъ  $NA$  (500); слѣдов. и проч. (545).

547. *Присовокъ 4.* Сегментъ  $ACL$  шара также равенъ конусу, стоящему на его основаніи  $CL$ , но имѣющему высоту  $OQ = OP - ON$ , такъ что  $NQ = OP$ .

Тѣло, произведенное чрезъ обращеніе шреуг-ка  $NQC$ , равняется конусу, имѣющему основаніемъ кругъ  $CL$ , а высотой  $NQ (= OP)$  (522); почему тѣло сіе равно конусу  $PCL$  (495) и слѣдов. сектору  $NCAL$  шара (546); чего ради, по опіяніи общаго конуса  $NCL$ , будетъ конусъ  $QCL$  равенъ сегменту  $ACL$  шара.

549. *Предложеніе XV.* Шары ( $ABCD$  и Черт. 181.  $FGHI$ ) суть въ отношеніи кубовъ изъ ихъ радиусовъ ( $EA$  и  $KF$ ).

Пусть  $NO$  и  $PQ$  большіе круги сихъ шаровъ, на коихъ стоятъ конусы  $ANO$  и  $FPQ$ , имѣющіе высотами радиусы  $EA$  и  $KF$ ; проведи въ сихъ кругахъ какіе ниестъ радиусы  $EN$  и  $KP$ ; найдемъ, что  $AE : FK = EN : KP$  (157), то есть оси конусовъ  $ANO$  и  $FPQ$  пропорціональны радиусамъ ихъ основаній и имѣющъ къ нимъ равные углы наклоненія, кои суть прямые; почему конусъ  $ANO$ ; ко-

иус.  $FPQ = \text{куб. } \overline{EA} : \text{куб. } \overline{KF}$  (501) и шар.  $ABCD : \text{шар. } FGHI = \text{куб. } \overline{EA} : \text{куб. } \overline{KF}$  (543 и 160).

549. *Присовок. 1.* Если секторы  $EBAD$  и  $KCFI$  шаровъ  $ABCD$  и  $FGHI$  произведены будутъ секторами  $EAB$  и  $KFG$  сихъ большихъ круговъ, у коихъ углы  $AEB$  и  $FKG$  при центрахъ  $E$  и  $K$  суть равные: то оные секторы шаровъ будутъ также въ отношеніи кубовъ изъ радіусовъ  $EA$  и  $FK$ .

По проведеніи прямыхъ  $AB$  и  $FG$ , увидишь, что въ треугольн.  $AEB$  и  $FKG$ ,  $EA : KF = AB : FG$  (83 и 203). И такъ секторы  $EBAD$  и  $KCFI$  равны такимъ прямымъ конусамъ, у коихъ оси  $EA$  и  $KF$  пропорціональны радіусамъ  $AB$  и  $FG$  ихъ оснований (545); слѣдов. и проч. (501).

550. *Присовок. 2.* Сегменты  $ABD$  и  $FGI$  шаровъ  $ABCD$  и  $FGHI$ , у коихъ высоты  $AL$  и  $FM$  пропорціональны радіусамъ  $LB$  и  $MG$  ихъ оснований, суть также въ отношеніи кубовъ изъ сихъ линий.

По проведеніи прямыхъ  $AB$  и  $FG$  найдешь, что треугольн.  $ALB$  и  $FMG$  суть подобны (206) и уг.  $BAE = \text{уг. } GFK$ ; почему треугольн.  $AEB$  и  $FKG$  (83) и треугольн.  $BLE$  и  $G MK$  (82) также подобны; чего ради  $EA : KF = AB : FG$  и  $EL : KM = LB : MG = BE : GK$  (203); слѣдов. какъ секторы  $EBAD$  и  $KCFI$  шаровъ, такъ и конусы  $EBD$  и  $KGI$ , будутъ въ отношеніи кубовъ изъ радіусовъ  $EA$  и  $KF$  (549 и 501); а потому и избытки однихъ предъ другими, то есть, сегменты  $ABD$  и  $FGI$  шаровъ будутъ въ томъ же отношеніи (178).

# ПРИБАВЛЕНІЕ

## КЪ ОСНОВАНИЯМЪ ГЕОМЕТРИИ

В

*измѣреній протяженностей.*

551. Измѣреніе величины есть изысканіе отношенія сей величины къ какой нибудь съ нею однородной величинѣ, произвольно взятой.

На величину сію, произвольно взятую, можемъ взиращъ какъ на общую мѣру всѣхъ однородныхъ съ нею величинъ; или еще какъ на единицу, съ кою сравнивая однородныя величины, можемъ узнать, сколько разъ она въ каждой изъ нихъ содержится и при томъ безъ остатка ли, или съ остаткомъ. Въ первомъ случаѣ, опредѣлится точное отношеніе сравниваемой величины къ сей общей мѣрѣ или единицѣ, въ другомъ же болѣе или менѣе приближенное.

552. Мѣра или единица съ измѣряемыми ею величинами должна быть однородна, ибо кратная или частная одной величины не могутъ быть разнородныя; поему линія измѣряется линіею, углы угломъ, поверхности поверхностью и наконецъ тѣла тѣломъ.

553. При измѣреніи вообще всякаго рода величины за мѣру или единицу приемлемъ, для многихъ очевидныхъ причинъ, самая простѣйшая однородная величина; поему всѣ линіи измѣряются прямою линіею.

всѣ углы прямымъ угломъ, всѣ поверхности равноснороннымъ прямоугольникомъ или квадратомъ, и наконецъ всѣ шѣла равноснороннымъ и прямоугольнымъ параллелепипедомъ или кубомъ.

554. Первый способъ, который къ измѣренію протяженныхъ величинъ представляется, есть слѣдующій:

Мѣра или единица прежде всего дѣлится на произвольное число равныхъ частей и дѣйствительно помѣщается нѣсколько разъ, или единожды на какую нибудь измѣряемую величину; и тогда число сихъ мѣръ, или число сихъ мѣръ и частей мѣры, или число однихъ частей мѣры, содержащихся въ измѣряемой величинѣ, покажетъ отношеніе ея къ мѣрѣ или единицѣ; и пошому, въ слѣдствіе предъидущаго опредѣленія (551), сія величина измѣрена будетъ.

555. Но таковой способъ измѣренія развъ въ случаѣ прямыхъ линий употребленъ быти можетъ; по большой же части онъ не способенъ и часто совсѣмъ невозможенъ; почему измѣреніе дѣлается посредствомъ частей или другихъ величинъ, кои принадлежатъ или относятся къ измѣряемымъ величинамъ, такъ что чрезъ отношеніе сихъ посредствующихъ въ измѣреніи величинъ къ своей мѣрѣ или единицѣ, сыскывается по Геометріи изчисленіемъ и по отношенію, каковое имѣютъ самыя измѣряемыя величины къ ихъ мѣрѣ или единицѣ, и чрезъ то величины сіи измѣрены бывають; отношеніе же оныхъ посредствующихъ въ измѣреніи величинъ къ ихъ мѣрѣ или единицѣ по-

знается предъидущимъ первымъ способомъ (554).

Напримѣръ, измѣреніе многоугольниковъ дѣлается посредствомъ сторонъ и угловъ ихъ, такъ что чрезъ отношеніе сихъ сторонъ и угловъ къ своей мѣрѣ или единицѣ, по Геометріи изчисленіемъ сыскивается и то отношеніе, каковое имѣютъ самые многоугольники къ мѣрѣ или единицѣ поверхностей, и чрезъ то оныя измѣрены бывають; отношеніе же сторонъ и угловъ къ ихъ мѣрѣ или единицѣ познается предъидущимъ первымъ способомъ (554).

Впрочемъ замѣнить надлежитъ, что хотя въ самой практикѣ для непосредственнаго измѣренія прямыхъ линий и угловъ, кромѣ сего перваго способа, никакого другаго употребить не можно: однако въ теоріи мы можемъ и непосредственно измѣрять сіи линіи и углы безъ всякаго опущенія; о каковомъ измѣреніи вѣстѣ съ измѣреніемъ поверхностей и тѣль въ слѣдующихъ четырехъ спашьяхъ и предложимъ.

## I. О измѣреніи прямыхъ линій.

556. Пусть прямую линію  $A$  прѣбуемъ Черп. 182. измѣрить другою прямою  $B$ , взятою за мѣру или единицу линій. Измѣряемая линіи могутъ быть соизмѣрима и несоизмѣрима съ своею мѣрою или единицею; почему здѣсь два случая имѣють мѣсто.

1) Пусть линія  $A$  соизмѣрима съ своею Но 1-ю мѣрою или единицею  $B$ .

Положи меньшую изъ нихъ, которая пусть будетъ единица  $B$ , на большую  $A$  столько

конца одной столько разъ, сколько содержится можеть, на примѣръ два раза съ остаткомъ  $C$ .

Положи остатокъ  $C$  на единицу  $B$  опять конца одной столько разъ, сколько содержится можеть, на примѣръ одинъ разъ съ остаткомъ  $D$ .

Положи второй остатокъ  $D$  на первой  $C$  опять конца одного столько разъ, сколько содержится можеть, на примѣръ одинъ разъ съ остаткомъ  $E$ .

Положи шрестій остатокъ  $E$  на второй  $D$  опять конца одного столько разъ, сколько содержится можеть.

И такъ далѣе, пока дойдешь до остатка, который въ предыдущемъ сколько ни есть разъ точно содержится будеть; что неизвѣстно послѣдовать, ибо линія  $A$  связанныю съ единицею  $B$  полагается ( $148$  и  $149$ ).

И тогда сей послѣдній остатокъ будеть общая мѣра между линіею  $A$  и единицею  $B$  ( $148$ ); почему отношеніе, числомъ изображающееся, сей линіи  $A$  къ единицѣ  $B$  удобно извлечется.

На примѣръ, если найдется, что остатокъ  $E$  содержится въ  $D$  точно два раза, то  $E$  будеть общая мѣра между линіею  $A$  и единицею  $B$ , и отношеніе, числомъ изображающееся, сей линіи  $A$  къ единицѣ  $B$  такъ найдется: поелику  $E$  содержится въ  $D$  два раза и  $C = D + E$ , то  $E$  будеть содержаться въ  $C$  три раза; потомъ, поелику  $B = C + D$ , то  $E$  будеть содержаться въ единицѣ  $B$  пять разъ; наконецъ, поелику  $A = 2B + C$ , то  $E$  будеть содержаться въ  $A$  шринадцать разъ.

И такъ отношеніе линіи  $A$  къ единицѣ  $B$  есть такое, что когда сія послѣдняя раздѣлится на 5 равныхъ частей и возмѣн-  
ся оныхъ 15, то получится линія  $A$ , и чис-  
ло, изображающее сіе отношеніе, есть  $\frac{15}{5}$ . Та-  
кимъ образомъ линія  $A$  единицею  $B$  измѣ-  
рена.

2) Пусть линія  $A$  съ своею мѣрою или единицею  $B$  несоизмѣрима. Въ семъ случаѣ точнаго, числомъ изображающагося, отно-  
шенія линіи  $A$  къ мѣрѣ или единицѣ  $B$  из-  
влечь уже не можно; ибо никакая кратная  
какой-либо частиной одной изъ нихъ не мо-  
жетъ быть равна другой ( $\frac{1}{48}$  и  $\frac{1}{49}$ ). Впро-  
чемъ въ семъ случаѣ, для опредѣленія линіи  
 $A$  по мѣрѣ или единицѣ  $B$ , другого средст-  
ва не останется, какъ употребить прибли-  
женіе, производя тоже самое дѣйствіе, ка-  
ковое учинено было при соизмѣримой съ  
единицею линіи, пока достигнешь до тако-  
го остатка, который за малостію презрѣтъ  
быть можетъ, или который выйдетъ мень-  
ше, нежели данная величина, коей погрѣш-  
ность должна быть меньше. И такъ.

Возми опять единицы такую частную  
величину, какова надобна будетъ, чтобы  
предполагаемая погрѣшность была меньше  
данной величины; потомъ оной частной ве-  
личины возми различныя крайнія; послѣд-  
няя изъ нихъ крайнихъ, кои меньше измѣ-  
ряемой линіи, будетъ меньшая приближен-  
ная величина (150), разнимающая оную из-  
мѣряемой линіи меньше, нежели данная ве-  
личина, коей погрѣшность должна быть  
меньше; а первая изъ нихъ крайнихъ, кои  
больше измѣряемой линіи, будетъ большая

приблизженная величина (150), разнствующая отъ измѣряемой линіи также меньше, нежели данная величина, коей погрѣшность должна быть меньше; и такимъ образомъ измѣряемая линія будетъ заключена между двумя предѣлами, числами изображающими-ся, в разнствующими отъ оной измѣряемой линіи меньше, нежели данная величина, коей погрѣшность должна быть меньше.

## II. О измѣреніи угловъ.

557. Изъ угловъ одни только прямолинейные измѣряются потому, что въ прочихъ Математика не имѣетъ надобности. И хотя мѣра или единица плоскихъ прямолинейныхъ угловъ есть прямой уголъ, однако измѣреніе ихъ не прямо чрезъ наложеніе симъ прямымъ угломъ дѣлается, но инымъ образомъ. Изъ вершинъ угловъ, какъ центровъ, описываются круговыя линіи такъ, что всѣ углы обращаются въ углы при центрѣ одного или многихъ равныхъ круговъ, и обыкновенно мѣряются одніе только дуги, на которыхъ углы состоятъ. Ибо въ слѣдствіе сего вышней уголъ такъ относиться будетъ къ прямому, какъ дуга, на которой онъ состоитъ, къ четверти окружности (256); почему чрезъ отношеніе дуги, на которой состоитъ измѣряемый уголъ, къ четверти окружности извѣстно будетъ и отношеніе сего угла къ прямому; въ чемъ и состоитъ измѣреніе собственно называемое (551).

Пусть, напримѣръ, дуг.  $AB$ :  $\frac{1}{4}$  окруж.  
 Черт. 83.  $\equiv 5^\circ 25'$ . Мы знаемъ, что дуг.  $AB$ :  $\frac{1}{4}$  окрж.  
 $\equiv$  уг.  $ACB$ : п. уг. (256); чего ради уг.  $ACB$ :

п. уг.  $\equiv 3: 25$  (159). Откуда по правилам Науки Изчисленія величина угла  $ACB$  опредѣлится и будетъ уг.  $ACB \equiv \frac{5}{25}$  п. уг.

Впрочемъ отношеніе дуги, на которой стоить измѣряемый уголъ, къ четверти окружности сыскивается помощію изъясненнаго способа измѣренія въ разсужденіи прямыхъ линий, который шѣмъ съ большею удобностію шуть употребленъ быть можеть, что кривизна дугъ одного или многихъ равныхъ круговъ есть вездѣ одинакова.

556. Между шѣмъ Геометры обыкновенно, какъ въ шомъ, такъ и въ другомъ случаѣ, поступаютъ сообразно съ предъидущимъ первымъ способомъ измѣренія (554). Они раздѣляютъ четверть окружности на 90 или всю окружность на 360 равныхъ частей, называемыхъ градусами; потомъ каждый градусъ на 60 равныхъ частей, называемыхъ минушами; каждую минушу на 60 равныхъ частей, называемыхъ секундами, и такъ далѣе; и послѣ сего помощію наложенія опредѣляютъ точно или приближенно отношеніе дуги, на которой стоить измѣряемый уголъ, къ четверти окружности; и слѣдов. такъ же и отношеніе самаго онаго угла къ углу прямому (256).

И даже, избѣгая посредства дуги и четверти окружности, полагаютъ, что самый прямой уголъ или всѣ четыре прямые угла раздѣлены на части, соотвѣтствующія помянутымъ частямъ четверти окружности или всей окружности, то есть, раздѣлены на углы, кои, имѣя шомъ же центръ, стоятъ на дугахъ, называемыхъ градусами, минушами, секундами, и такъ далѣе. чет-

верти или всей окружности и кои пошому тѣмъ же именами означаются.

Градусы, минуты, секунды, и проч. изображаются такъ: ( $^{\circ}$ ), ( $'$ ), ( $''$ ), и проч. На примѣръ  $59^{\circ}$ ,  $3'$ ,  $5''$  значитъ 59 градусовъ, 3 минуты и 5 секундъ.

Поставимъ въ предъидущемъ примѣрѣ величину прямого угла, то есть  $\frac{360^{\circ}}{9} = 90^{\circ}$ ; найдемъ, что уг.  $ACB = \frac{5}{55} \times 90^{\circ} = 10^{\circ}$ ,  $48'$ .

559. Новѣйшіе Французскіе Геометры приняли иное раздѣленіе четверти или самой окружности круга; они раздѣлили четверть окружности на 100 или самую окружность на 400 равныхъ частей, называемыхъ градусами; пошому каждый градусъ на 100 равныхъ частей, называемыхъ минутами; каждую минуту на 100 равныхъ частей, называемыхъ секундами, и такъ далѣе.

Чтобы сіи десятичные градусы привесть въ обыкновенные и обратно: обыкновенные въ десятичные, надлежитъ шюмо записатьъ, что десятичный градусъ есть  $\frac{9}{10} = 0,9$  отъ градуса обыкновеннаго и равняется  $5\frac{4}{10}$  минутамъ сего послѣдняго; ибо  $(0,9^{\circ}) = \frac{9}{10} \times 60' = 54'$ . Градусъ же обыкновенный, какъ составляющій  $\frac{10}{9}$  градуса десятичнаго,  $= 1^{\circ}$ , 11 111 . . . десятичнаго.

То и другое изъ сихъ раздѣленій четверти или самой окружности круга въ умозрительной Математикѣ есть шюмо мысленное, а въ практической дѣйствительное; учовенное механически на металлическомъ или иномъ вещественномъ кругѣ. Сей кругъ или какаа либо известная часть оваго, смотря по употребленію, называется *транс-*

перипетрой, астролабией, квадрантомъ, и проч.

### III. О измѣреніи поверхностей.

560. При измѣреніи поверхностей, какъ то сказано выше (555), за мѣру или единицу приемлется квадратъ, составленный из прямой линіи произвольной величины; но для большей въ измѣреніи удобности, обыкновенно, за сію мѣру или единицу берется такой квадратъ, который составленъ из мѣръ или единицъ линій.

561. Изъ Основаній Геометріи явствуется, что измѣреніе какъ плоскихъ, такъ и извѣстныхъ трехъ кривыхъ поверхностей, единственно зависитъ отъ измѣренія прямоугольника; чего ради пусть будетъ прмг.  $ABCD$ , стоящій на основ.  $AB$  и имѣющій Черт. 183. выс.  $BC$ , и пусть пребудется измѣрению оный квадратомъ  $EFGH$ , составленнымъ из мѣръ или единицъ линій  $EF$ .

Съизи такую прямую  $EI$ , чтобы имѣла мѣсто пропорція  $EI:AB=BC:EF (=1)$  (185) и соединивъ на оной прмг.  $EIKH$ , имѣющій выс.  $IK=BC=EF=1$  (107); будетъ прмг.  $EIKH=$  прмг.  $ABCD$  (194); но прмг.  $EIKH$ : кдр.  $EFGH=EI:EF (=1)$  (191); чего ради прмг.  $ABCD$ : кдр.  $EFGH=EI:EF (=1)$ .

Пусть  $AB$  и  $BC$  означаютъ числа и пусть наиримѣрь  $AB=9$  и  $BC=5$ ; произведение  $AB \times BC (=9 \times 5)$  будетъ не что иное, какъ четвертая пропорціональная къ первымъ даннымъ величинамъ  $AB=9$ ,  $BC=5$  и  $EF=1$ ; ибо рассматривая четыре вели-

чинъ:  $9 \times 5$ , 9, 5 и т. найдешь, что онѣ суть пропорціональны, то есть  $9 \times 5 : 9 = 5 : 1$  (151). Сравни сѣю пропорцію съ пропорціею  $EI : AB = BC : EF (= 1)$ ; заключишь, что  $EI = AB \times BC (= 9 \times 5)$  (166); почему будетъ прѣм.  $ABCD$ : кдр.  $EFGH = AB \times BC : 1$ .

И такъ отношеніе прямоугольника  $ABCD$  къ квадрату  $EFGH$ , взятому за мѣру или единицу поверхностей, есть тоже, что и отношеніе прямой линіи, сослѣдующей произведеніе основанія его  $AB$ , умноженнаго на высоту  $BC$ , къ линейной единицѣ, и слѣдов. отношеніе сѣя прямоугольника  $ABCD$  къ квадрату  $EFGH$  есть самое оное произведеніе  $AB \times BC$ ; почему, когда даны основаніе  $AB$  и высота  $BC$  прямоугольника  $ABCD$ , то прямоугольникъ сей чрезъ оное произведеніе  $AB \times BC$  будетъ измѣренъ.

562. Сверхъ сего замѣнить надлежитъ:

1) На произведеніе  $AB \times BC$  Геометры возвращаютъ, какъ на количество мѣръ или единицъ поверхностей  $EFGH$ , содержащихся въ прямоугольникѣ  $ABCD$ .

Ибо сколько въ линіи  $EI$  помѣстится можетъ линейныхъ мѣръ  $EF$ , столько же и въ прямоугольникѣ  $EIKH$  помѣстится мѣръ поверхностей  $EFGH$ ; и что если въ линіи  $EI$  останется остатокъ  $LI$ , то и въ прямоугольникѣ  $EIKH$  также останется остатокъ  $LHKM$ , соразмѣрный остатку  $LI$  въ разсужденіи мѣръ  $EFGH$  и  $EF$ . Откуда и видно, что линіи  $EI$  и слѣдов. также произведеніе  $AB \times BC$  изображаетъ количество мѣръ  $EFGH$ , содержащихся въ прямоугольникѣ  $EIKH$  или въ равномъ ему прямоугольникѣ  $ABCD$ .

я) На тоже произведение  $AB \times BC$  Геометры взирають еще какъ на самую величину или площадь прямоугольника  $ABCD$ . Ибо прмг.  $ABCD$ : кдр.  $EFGH = AB \times BC : 1$  и кдр.  $EFGH$  приемлется за единицу поверхностей; то будетъ, кдр.  $EFGH = 1$  и прмг.  $ABCD = AB \times BC$  (165).

563. Отсюда явствуетъ, что прямоугольники суть такъ между собою, какъ произведенія изъ оснований, умноженныхъ на ихъ высоты (561 и 173). Изъ чего слѣдуетъ способъ измѣрять поверхности, вмѣсто квадрата, прямоугольникомъ, какъ по всякой удобно понять можешь.

564. Отсюда же явствуетъ, что площадь прмг-ка  $ABCD$ , въ коемъ выс.  $BC =$  основ.  $AB$  и который есть квадратъ (98), по доказанному выше (561), въ подразумѣваніи единицы поверхностей изобразится чрезъ  $AB \times AB$ , или кратче, чрезъ  $AB^2$ .

565. Изъ предложеннаго доселѣ о измѣреніи поверхностей усматриваемъ, что при изслѣдованіи различныхъ свойствъ до прямоугольниковъ и квадратовъ относящихся, можемъ вмѣсто прямоугольниковъ употреблять произведенія изъ ихъ оснований, умноженныхъ на высоты, и вмѣсто квадратовъ вторыя степени или арифметическіе квадраты изъ ихъ сторонъ.

Въ семъ заключается все знаніе о измѣреніи какъ плоскихъ, такъ и кривыхъ поверхностей, входящихъ въ составъ сихъ Основаній Геометріи; почему, прилагая изъясненное предъ симъ (561 и 562) о измѣреніи прямоугольника къ другимъ поверхностямъ, найдемъ, что

- Черт. 65. а) Пгр.  $ABCD = \text{прмг. } \overline{AB, DI} (109) = AB \times DI$ .
- б) Треуг.  $ABD = \frac{1}{2}$  пгр.  $ABCD (95) = \frac{1}{2} AB \times DI$ ,  
 Черт. 100. или треуг.  $ABC = \frac{1}{2} P \times H (299)$ , где  $P$  есть периметръ его, а  $H$  радиусъ вписаннаго въ немъ круга.
- Черт. 33. в) Трапец.  $ABCD = \text{треуг. } FGH = \frac{1}{2} FG \times HI = \frac{1}{2} (AB + CD) \times DE = \frac{1}{2} MN \times DE (115 \text{ и } 114)$ .
- Черт. 44. д) Многоуг.  $ABCDE = \text{треуг. } ABC + \text{треуг. } ACD + \text{треуг. } ADE (156)$ ; или еще многоуг.  $ABCDE = \text{треуг. } GBC (141)$ ; почему если величины оснований и высоты сихъ треугольниковъ будутъ извѣсны, то и величина или площадь многоугольника  $ABCDE$  опредѣлятся.
- Черт. 105. е) Круг.  $ABD = \text{треуг. } PQR = \frac{1}{2} PQ \times PR (510)$ , где  $PQ$  есть окружность сего круга, а  $PR$  радиусъ его. Но мы знаемъ, что окружности круговъ относятся между собою какъ ихъ радиусы или діаметры (515 и 160); почему, если означимъ окружность, коей діаметръ  $= 1$ , чрезъ  $\pi$ , а другую, коей діаметръ есть  $2a$ , чрезъ  $C$ , будемъ имѣть пропорцію  $1 : 2a = \pi : C$ , изъ коей по правиламъ Науки Изчисленія найдемъ  $C = 2a \times \pi = 2\pi a$ ; чего ради въ предыдущемъ выраженіи положимъ  $PR = a$  получимъ  $PQ = 2\pi a$  и площадь круга  $ABD$  изобразится чрезъ  $\pi a^2$  (\*).

(\*) Архимедъ первый чрезъ вписываніе въ кругъ и описываніе около него правильныхъ многоугольниковъ опредѣлялъ приближенное отношеніе окружности его къ своему діаметру; онъ, полагая діаметръ  $= 1$  и соотновѣствующую ему окружность  $= \pi$ , снѣмъ способомъ нашимъ, что  $\pi : 1 = 22 : 7$ .

- г) Сегм.  $ACB =$  треуг.  $EFC = \frac{1}{2} EF \times EC =$  Черт. 104  
 $\frac{1}{2}$  дуг.  $AB \times AC$  (511), ибо въ треуг.-кѣ  $EFC$   
 основ.  $EF =$  дуг.  $AB$  и выс.  $EC =$  рад.  $AC$ .
- г) Сегм.  $AKB =$  треуг.  $EIC$ , въ коемъ основ.  
 $EI =$  дуг.  $AKB - BH$  и выс.  $EC =$  рад.  $AC$ ,  
 а сегм.  $ADB =$  треуг.  $IMG$ , коего основ.  
 $IM =$  дуг.  $ADB + BH$  и выс.  $EG =$  рад.  $AC$   
 (512); чего ради круга  $ABD$  меньшій сегм.  
 $AKB = \frac{1}{6}$  (дуг.  $AKB - BH$ )  $\times AC$ , а большій  
 сегм.  $ADB = \frac{1}{6}$  (дуг.  $ADB + BH$ )  $\times AC$ , гдѣ  $BH =$   
 $\frac{1}{6}$  хорд.  $BL$ , стягивающей дугу  $BAL = 2$  дуг.  
 $AKB$ .
- д) Кольцо  $ABCEDEF =$  круг.  $ABC -$  круг.  $DEF =$  Черт. 106.  
 $\pi \times (AG^2 - DG^2) = \pi \times BD^2$  (515), гдѣ  $BD$   
 есть средняя пропорціональная между  
 $AG + DG$  и  $AG - DG$ .
- и) Поверхность правильной пирамиды рав-  
 на треугольнику, коего основаніе есть  
 периметръ основанія пирамиды, а высо-

Но послѣ него при томъ же положеніи опредѣлены  
 ближайшія отношенія окружности круга къ его  
 діаметру, изъ нихъ по простотѣ и точности за-  
 служиваетъ быть извѣстнымъ найденное *Мейсандр*  
 и кое есть таково:  $\pi : 1 = 355 : 113$ .

Изъ сихъ отношеній чрезъ изчисленіе получится  
 $\pi = \frac{355}{113} = 3, 14285 \dots$  или  $= \frac{355}{113} = 3, 141592 \dots$ ;  
 почему, если сіи величины поставятся въ найден-  
 ное для площади круга  $ABD$  выраженіе  $\pi a^2$ , будетъ  
 оная площадь или самый кругъ  $ABD = \frac{22}{7} a^2$  или  
 $\frac{355}{113} a^2$ . А изъ сего слѣдуетъ, что площадь круга  
 къ квадрату изъ его радіуса относится почти  
 такъ, какъ 22:7 или какъ 355:113, а къ квадра-  
 ту изъ его діаметра почти такъ, какъ 11:14 или  
 какъ 355:452.

та равна апоthemъ ея (369); чего ради, если периметръ сей означимъ чрезъ  $P$ , а апоthemу чрезъ  $H$ , оная поверхность будетъ  $= \frac{1}{2} P \times H$ .

- к) Поверхность правильной призмы равна прямоугольнику, коего основаніе есть периметръ основанія призмы, а высота одно изъ ея реберъ (369); посему, если периметръ сей положимъ  $= S$ , а ребро  $= K$ , оная поверхность изобразится чрезъ  $S \times K$ .

Черт. 159. 1) Возьмемъ прямой конусъ  $ABD$ , коего поверхность равна треуголу  $OPQ$ , имѣющему основ.  $PQ =$  окржн.  $BD$ , а выс.  $PO = AB$  (465); сія поверхность изобразится чрезъ

Черт. 160.

$\pi \times BC \times AB$ , или чрезъ  $\pi \times KL^2$  (467), или еще чрезъ  $\pi \times X^2$  (469), гдѣ  $KL$  и  $X$  суть среднія пропорціональныя: первая между  $AB$  и  $BC$ , а другая между осью  $AC$  и двукратнымъ перпендикуляромъ  $RS$ , поставленнымъ изъ середины  $AB$  въ плоскости сихъ прямыхъ  $AB$  и  $AC$  и продолженнымъ до пресѣченія съ тою осью.

Черт. 159. II) Возьмемъ прямой усѣч. конусъ  $BDEC$ , коего поверхность равна прямой трапец.

$PQTX$ , имѣющей прямыя стороны  $PQ =$  окржн.  $BD$ ,  $XT =$  окржн.  $EG$  и выс.  $PX = BE$  (466); сія поверхность изобразится чрезъ  $\pi (BC + EF) \times BE$ , или чрезъ  $\pi \times MN^2$  (471), или еще чрезъ  $\pi \times T^2$  (472), гдѣ  $MN$  и  $T$  суть среднія пропорціональныя: первая между  $BE$  и  $BC + EF$ , а другая между осью  $CF$  и двукратнымъ перпендикуляромъ  $RS$ , поставленнымъ изъ середины  $BE$  въ плоскости сихъ прямыхъ  $BE$  и  $CF$  и продолженнымъ до пресѣченія съ тою осью.

Черт. 162.

- п) Возьмемъ прямой цилиндръ  $ABCD$ ; заклю- Черт. 163.  
чимъ, что поверхность его  $= 2\pi AE \times AC$   
(479); или еще  $= \pi \times RS^2$ , гдѣ  $RS$  есть  
средняя пропорціональная между  $AC$  сто-  
роною сего цилиндра и  $AB$  діаметромъ  
его основанія (480).
- о) Поверхность шара  $ADCK$  есть четыре- Черт. 180.  
кратна большаго его круга  $ACHL$  (552);  
чего ради она изобразится чрезъ  $4\pi \times NA^2$ .
- р) Поверхность сегмента  $ACL$  шара  $ADCK$   $=$   
 $\pi \times AC^2$ , гдѣ  $AC$  есть средняя пропорціо-  
нальная между  $AO$  высотой сего сегмен-  
та и  $AG$  діаметромъ шара (555), или та-  
же поверхность  $= 2\pi \times NA \times AO$ , ибо  $AC^2 =$   
 $2NA \times AO$  (195).
- q) Поверхность сектора  $NCL$  шара  $ADCK$   $=$   
поверхн. сегм. - та  $ACL$  + поверхн. кону-  
са  $NCL = 2\pi \times NA \times AO + \pi \times CO \times NA =$   
 $\pi(2AO + CO) \times NA$ .

#### IV. О измѣреніи тѣлъ.

556. При измѣреніи тѣлъ, какъ то ска-  
зано выше (555), за мѣру или единицу при-  
емается кубъ изъ прямой произвольной ве-  
личины; но для большей въ измѣреніи удоб-  
ности, обыкновенно, за сію мѣру или едини-  
цу берутъ кубъ изъ мѣры или единицы ли-  
ній.

557. Изъ Основаній Геометріи явству-  
етъ, что измѣреніе тѣлъ, содержащихся и  
плоскостями и извѣстными (24) тремя кри-  
выми поверхностями, единственно зави-  
ситъ отъ измѣренія прямоугольнаго парал-  
лелепипеда; чего ради пусть будетъ примъ.  
прод.  $AECD$ , стоящій на прим.  $AC$ , во- Черт. 181

его соприкосновенныя стороны суть  $AB$  и  $BC$ , и имѣющій выс.  $CD$ , и пусть требуется его измѣрить кубомъ  $FKHI$  изъ мѣры или единицы  $FG$  линий.

Сыщи такую прямую  $FL$ , чтобы имѣла мѣсто пропорція  $FL: AB = EC: FG (= 1)$  (185), и составь на оной прмг.  $FM$ , имѣющій высоту  $LM = CH = FG = 1$  (107); будетъ прмг.  $FM =$  прмг.  $AC$  (194); попомъ на прмг.  $FM$  составь прмг-ный прид.  $FOMN$ , имѣющій выс.  $MN = CD$  (585); будетъ также прид.  $FOMN =$  прид.  $AECD$  (589); сыщи еще такую прямую  $FP$ , чтобы имѣла мѣсто пропорція  $FP: FL = CD (= MN): FG (= 1)$  (185), и составь на ней прмг.  $FQ$ , имѣющій высоту  $PQ = LM = CH = FG = 1$  (107); попомъ на семъ прямоугольнике составь прмг-ный прид.  $FKQR$ , имѣющій высоту  $QR = HI = FG = 1$  (585); будетъ прмг.  $FQ: прмг. FM = FP: FL$  (191) и въ слѣдствіе предыдущей пропорціи прмг.  $FQ: прмг. FM = MN: QR$  (159); почему прид.  $FOMN =$  прид.  $FKQR$  (492) и слѣдов. также прид.  $AECD =$  прид.  $FKQR$ ; но прид.  $FKQR$ : куб.  $FKHI = FP: FG (= 1)$  (419) и  $FL = AB \times BC$ , а  $FP = FL \times CD = AB \times BC \times CD$  (561); чего ради прид.  $AECD$ : куб.  $FKHI = AB \times BC \times CD$ ; и

И такъ отношеніе параллелепипеда  $AECD$  къ кубу  $FKHI$ , ваятому за мѣру или единицу тѣлъ, есть такое, что и отношеніе прямой линіи, составляющей произведеніе изъ длины ея  $AB$ , помноженной на ширину  $BC$  и высоту  $CD$ , къ линейной единицѣ, и слѣдов. отношеніе сіе параллелепипеда  $AECD$  къ кубу  $FKHI$  есть самое оное

произведение  $AB \times BC \times CD$ ; почему, когда даны сѣи пропяхенія  $AB$ ,  $BC$  и  $CD$  параллелепипеда  $AECD$ , то параллелепипедъ сей чрезъ оное произведение будетъ измѣренъ.

568. Сверхъ сего замѣшши надлежитъ:

1) На произведение  $AB \times BC \times CD$  Геометры взирають, какъ на количество мѣръ или единицъ тѣла  $FKHI$ , содержащихся въ параллелепипедѣ  $AECD$ . Разсуждая подобнымъ образомъ, какъ разсуждали при прямоугольникѣ (562), ясно усмотримъ тому и причину.

2) На тоже произведение  $AB \times BC \times CD$  Геометры взирають еще, какъ на самую величину или толщину параллелепипеда  $AECD$ . Ибо прид.  $AECD$ : куб.  $FKHI = AB \times BC \times CD$ : 1 и куб.  $FKHI$  приемлется за единицу тѣла; то будетъ куб.  $FKHI = 1$  и прид.  $AECD = AB \times BC \times CD$  (165).

3) Наконецъ, поелику въ произведеніи  $AB \times BC \times CD$  произведение  $AB \times BC (= FL)$  изображаетъ отношеніе основанія  $AC (= \text{прмг. } FM)$  къ единицѣ поверхностей  $FH$ ; то Геометры не рѣдко говорятъ, что толщина параллелепипеда  $AECD$  равняется произведенію основанія  $AC$ , умноженного на его высоту  $CD$ .

569. Отсюда явствуетъ, что параллелепипеды суть такъ между собою, какъ произведенія изъ сихъ длинъ, умноженныхъ на ихъ же ширины и высоты (567 и 173). Изъ чего слѣдуетъ способъ измѣрять тѣла, вмѣсто куба, параллелепипедомъ, какъ то всякой удобно понять можетъ.

570. Отсюда же явствуетъ, что толщина прямоугольнаго прид.  $AECD$ , въ коемъ

три соприкосновенныя ребра равны между собою и который есть кубъ (380), по доказанному выше (567), въ подразумѣваніи единицы тѣлъ изобразится чрезъ  $AB \times AB \times AB$ , или кратче, чрезъ  $AB^3$ .

571. Изъ предложеннаго доселѣ о измѣреніи тѣлъ мы усматриваемъ, что при измѣдованіи свойствъ, до прямоугольныхъ параллелепипедовъ и кубовъ относящихся, мы можемъ вмѣсто параллелепипедовъ употреблять произведенія изъ ихъ длинъ, умноженныхъ на ихъ же ширины и высоты, и вмѣсто кубовъ третьи степени или аризмещическіе кубы изъ ихъ сторонъ.

Въ семъ заключается вся теорія измѣренія тѣлъ, послѣ коей все прочее, относящееся до сего предмета, читателю удобно самъ собою произвешти можетъ. Въ самомъ дѣлѣ прилагая сказанное предъ симъ о измѣреніи параллелепипеда (567 и 568) къ другимъ тѣламъ, составляющимъ предметъ сихъ Основаній Геометріи, онъ найдетъ, что

Черт. 152. а) Прзд.  $AECG$  = основ.  $AC \times EF = AB \times AD \times EF$  (568; 2 и 3); ибо прзд.  $AECG$  = прм-му прзд.  $AB, AD, EF$  (388).

Черт. 159. б) Прзм.  $ABCEFG$  =  $\frac{1}{2}$  прзд.  $AECG$  =  $\frac{1}{2}$  основ.  $AC \times AE$  = основ.  $ABC \times AE$  (382); ибо треуг.  $ABC$ , на коемъ стоитъ прзм.  $ABCEFG$ , =  $\frac{1}{2}$  основ.  $AC$  (95). А изъ сего заключить, что и всякой призмы величина изобразится произведеніемъ изъ ея основанія и высоты; поелику всякая многосторонняя призма можетъ обращена быть въ трехстороннюю, по основанію и высотѣ ей равную (391 и 392).

- γ) Прд.  $PLMNO = \frac{1}{3}$  основ.  $LMNO \times LU$  (402). Черт. 148.
- δ) Усѣч. прд.  $BCDEFCHIKL = \frac{1}{3}(M + N + V) \times$  Черт. 126.  
 $H$ , гдѣ  $M =$  основ.  $BCDEF$ ,  $N =$  основ.  $GHIKL$ ,  $V$  средняя пропорціональная между или площадь и  $H$  высота сей усѣченной пирамиды (403 и 464).
- ε) Многогр.  $ABCDEFGH =$  прд.  $ABCGF +$  прд. Черт. 151.  
 $AFGHE +$  прд.  $ACGH D$  (414); почему, если основанія и высоты сихъ пирамидъ будутъ извѣстны, то и величина многоугла  $ABCDEFGH$  опредѣлится.
- ζ) Конусъ  $ABD = \frac{1}{3}$  основ.  $BD \times AE = \frac{1}{3} \pi \times BC^2 \times$  Черт. 167.  
 $AE$  (433).
- η) Усѣч. конус.  $BDMP = \frac{1}{3}$  (основ.  $BD +$  основ.  $MP + V) \times OE = \frac{1}{3} \pi (BC^2 + MN^2 + BC \times MN) \times$   
 $OE$ , гдѣ  $V = \pi BC \times MN$  есть средняя пропорціональная величина между нижнимъ и верхнимъ основаніями сего конуса (439).
- ι) Цилиндръ  $ABCD =$  основ.  $AB \times FG =$  Черт. 168.  
 $\pi AE^2 \times FG$  (494).
- κ) Шаръ  $ADCK = 4$  конус.  $ADK = \frac{4}{3} \pi \times NA^3 =$  Черт. 180.  
 $\frac{2}{3} \pi NA^2 \times AC$  (543 и 544).
- λ) Сект.  $NCAL$  шара  $ADCK = \frac{1}{3} \pi AC^2 \times NA$  (545), или  $= \frac{1}{3} \pi CO^2 \times OP$  (546), или еще  $= \frac{2}{3} \pi NA^2 \times AO$ ; ибо  $AC^2 = AC \times AO = 2NA \times AO$  (195).
- μ) Сект.  $ACL$  шара  $ADCK =$  сект.  $NCAL -$  конус.  $NCL = \frac{1}{3} \pi CO^2 \times OP - \frac{1}{3} \pi \times CO^2 \times ON = \frac{1}{3} \pi CO^2 (OP - ON) = \frac{1}{3} \pi CO^2 \times OQ$  (547).
- Если же изъ найденныхъ для сектора  $NCAL$  выраженій возьмется  $\frac{1}{3} \pi AC^2 \times NA$ : то будетъ сект.  $ACL = \frac{1}{3} \pi AC^2 \times NA - \frac{1}{3} \pi CO^2 \times ON = \frac{1}{3} \pi (CO^2 + AO^2) \times NA - \frac{1}{3} \pi CO^2 (NA - AO) = \frac{1}{3} \pi AO^2 \times NA + \frac{1}{3} \pi CO^2 \times AO$ .

# ПОГРЪШНОСТИ.



| страни. строк. | напечатано                                  | типай                                       |
|----------------|---------------------------------------------|---------------------------------------------|
| 1X 16          | сшзрался                                    | старался                                    |
| 28 15          | сколько бы                                  | сколь бы                                    |
| 44 11          | прмг. $\overline{EGDE}$                     | прмг. $\overline{EG}, \overline{DE}$        |
| 69 16          | равный.                                     | равный,                                     |
| 77 25          | $FH =$ и $FI$ ;                             | $FH$ и $FI$ ;                               |
| 78 5           | многоуг.,                                   | многоугольникъ,                             |
| — 11           | и на $AD =$                                 | и на $AD$                                   |
| 88 6           |                                             | Черт. 72.                                   |
| 94 35          | и 254                                       | и 256                                       |
| 105 36         | діаметръ $AG$ ;                             | діаметръ $AS$ ;                             |
| 111 34         | Черт. 93.                                   | Черт. 98.                                   |
| 115 17         | которов                                     | которое                                     |
| 120 11         | $F - B : B$                                 | $F - B : B$                                 |
| 163 4          | $OX, OF,$                                   | $OX, OF,$                                   |
| 175 10         | многогранники                               | многогранника                               |
| 200 18         | и 139                                       | и 159                                       |
| 201 8          | равнымъ                                     | равнымъ                                     |
| — 10           | кар. $\overline{MN}$ — кар. $\overline{HI}$ | кар. $\overline{MN} =$ кар. $\overline{HI}$ |



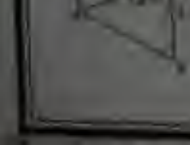
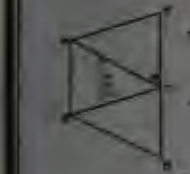
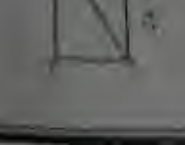
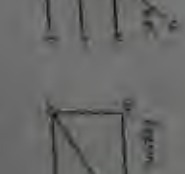
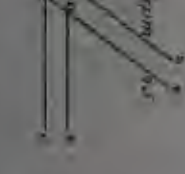
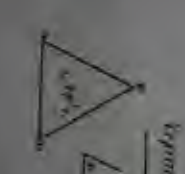
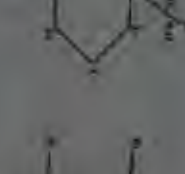
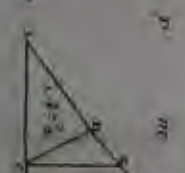
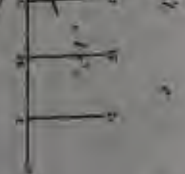
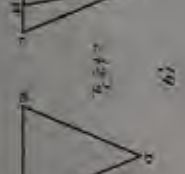
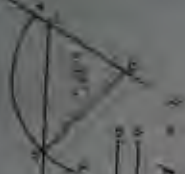
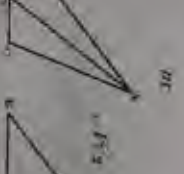
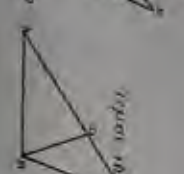
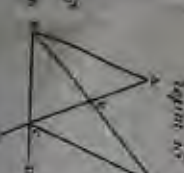
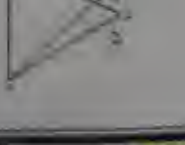
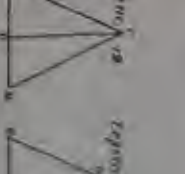
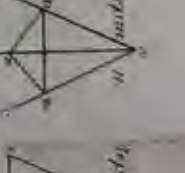
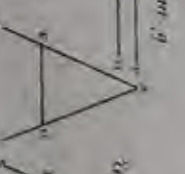
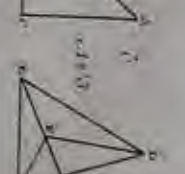
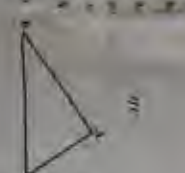
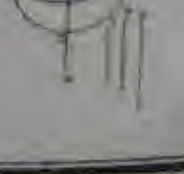
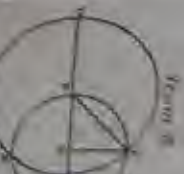
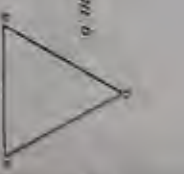
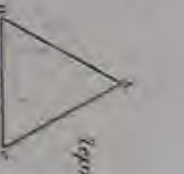
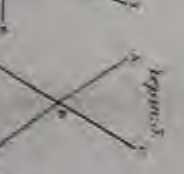
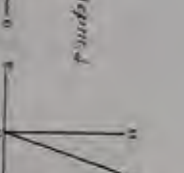
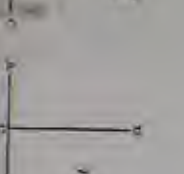
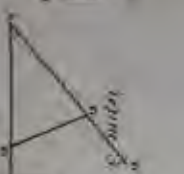




Figure 33

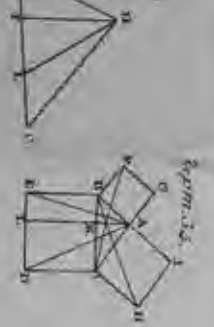


Figure 34



Figure 35



Figure 36



Figure 37



Figure 38



Figure 39

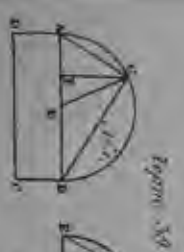


Figure 40

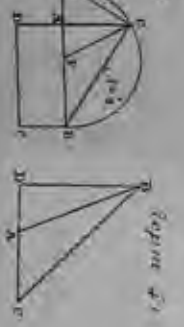


Figure 41



Figure 42



Figure 43



Figure 44



Figure 45



Figure 46



Figure 47



Figure 48



Figure 49



Figure 50



Figure 51



Figure 52



Figure 53

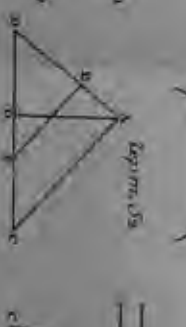


Figure 54



Figure 55



Figure 56



Figure 57



Figure 58



Figure 59



Figure 60



Figure 61



Figure 62



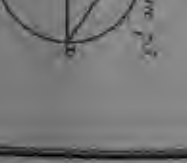
Figure 63

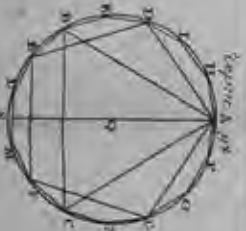


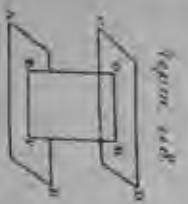
Figure 64



Figure 65







Черт. 128



Черт. 129



Черт. 140



Черт. 141



Черт. 142



Черт. 143



Черт. 144



Черт. 145

Черт. 128

Черт. 129

Черт. 130

Черт. 131

Черт. 132

Черт. 133

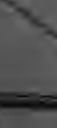
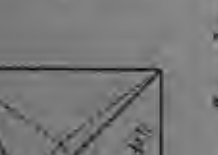
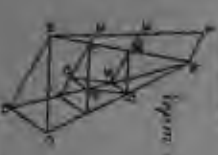
Черт. 134

Черт. 135

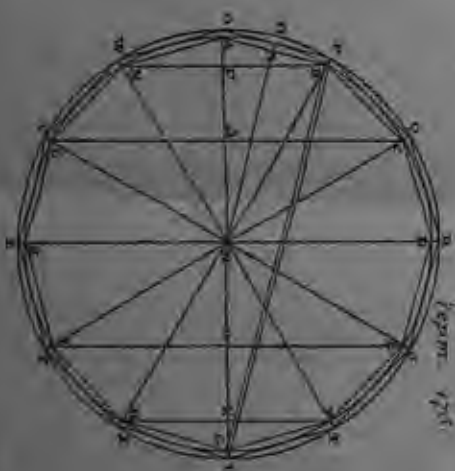
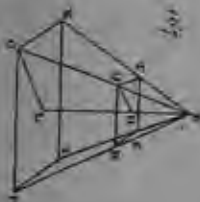
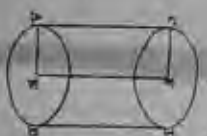
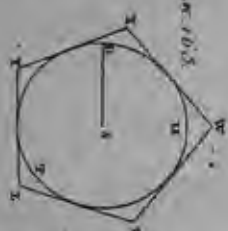
Черт. 136

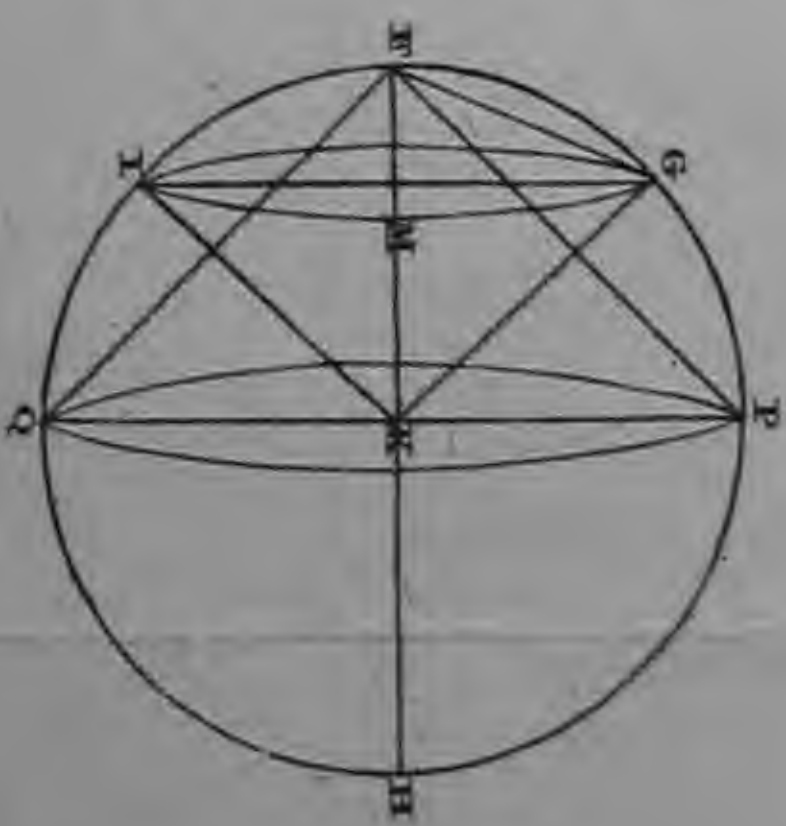
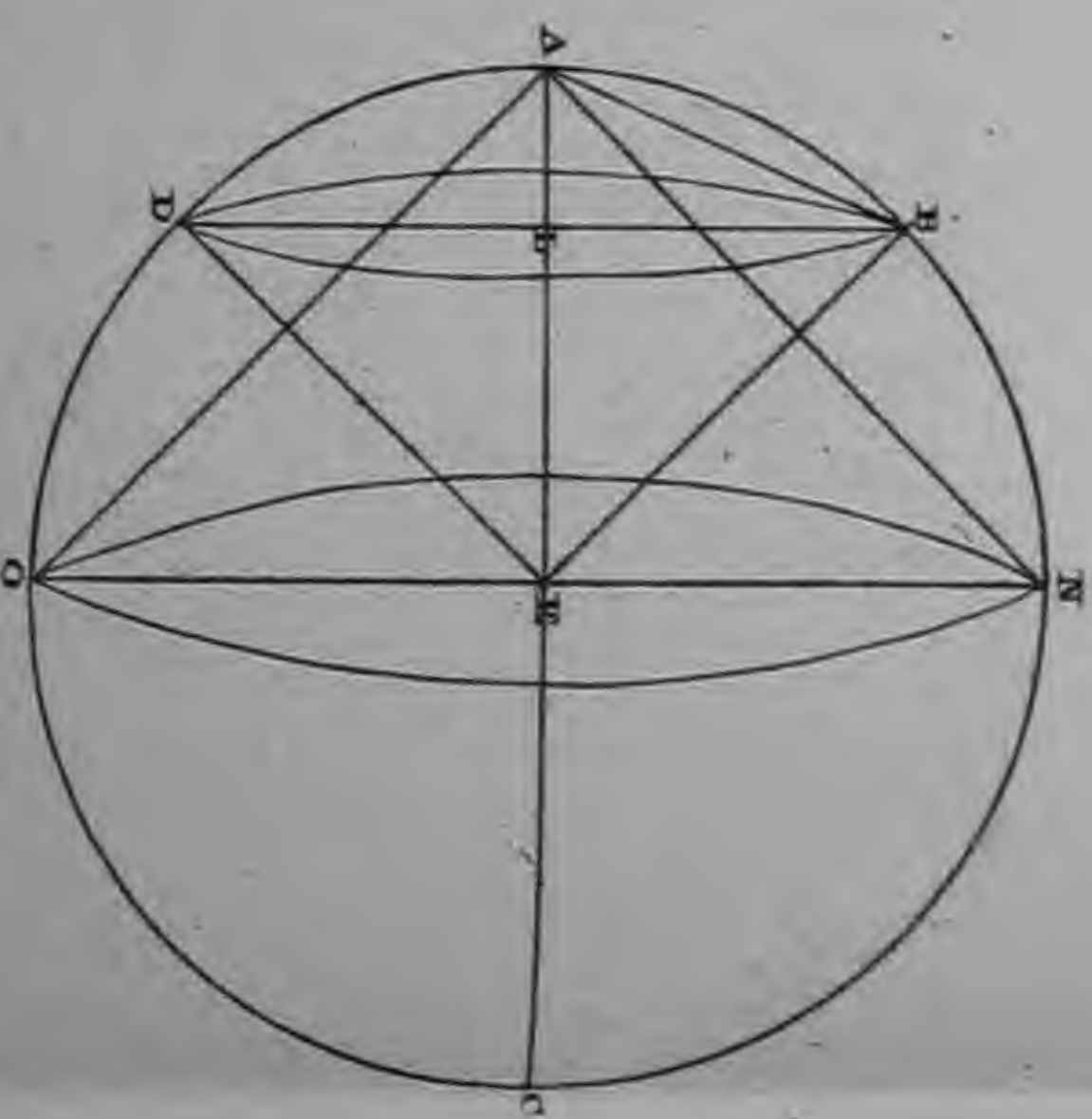
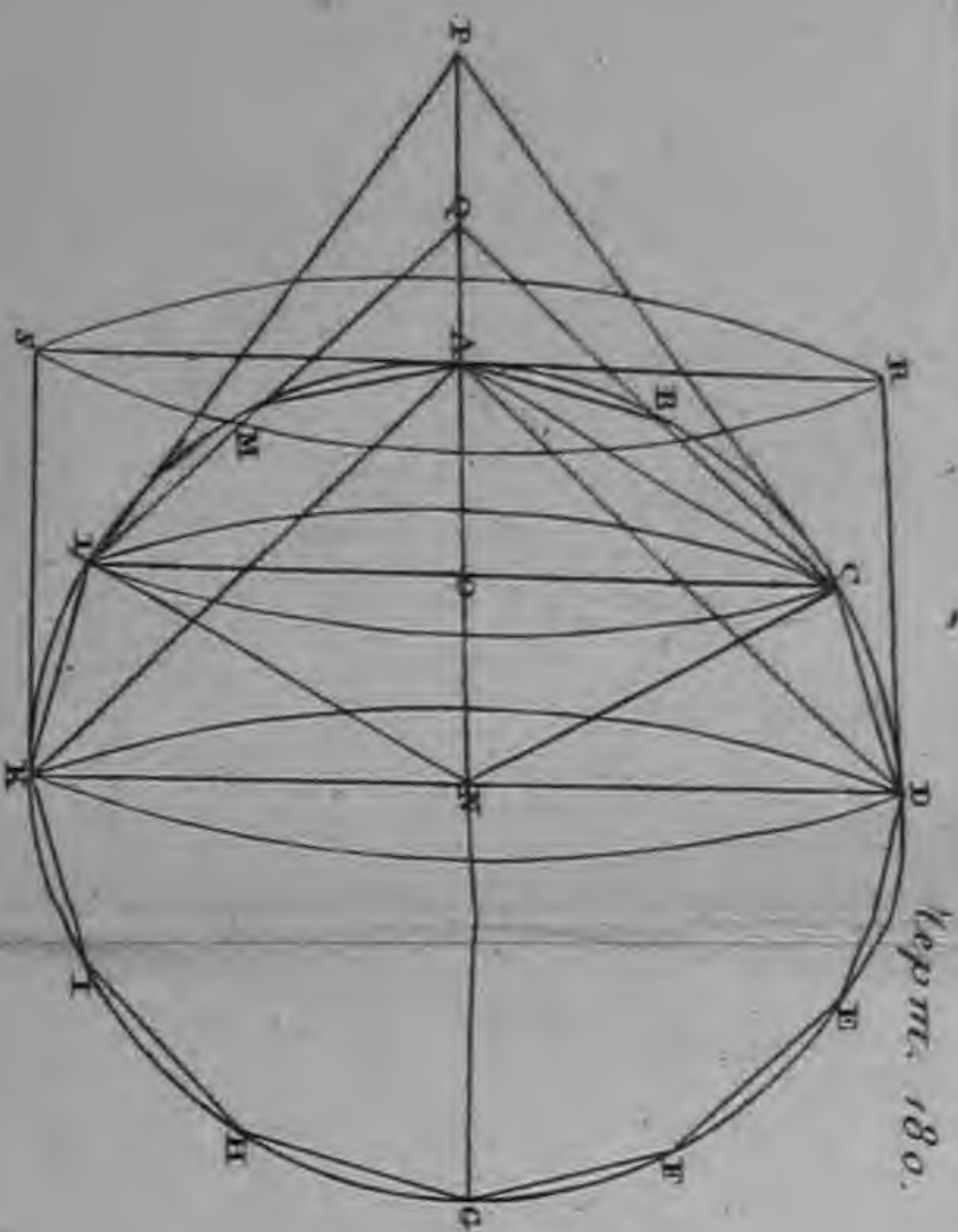
Черт. 137

Черт. 138



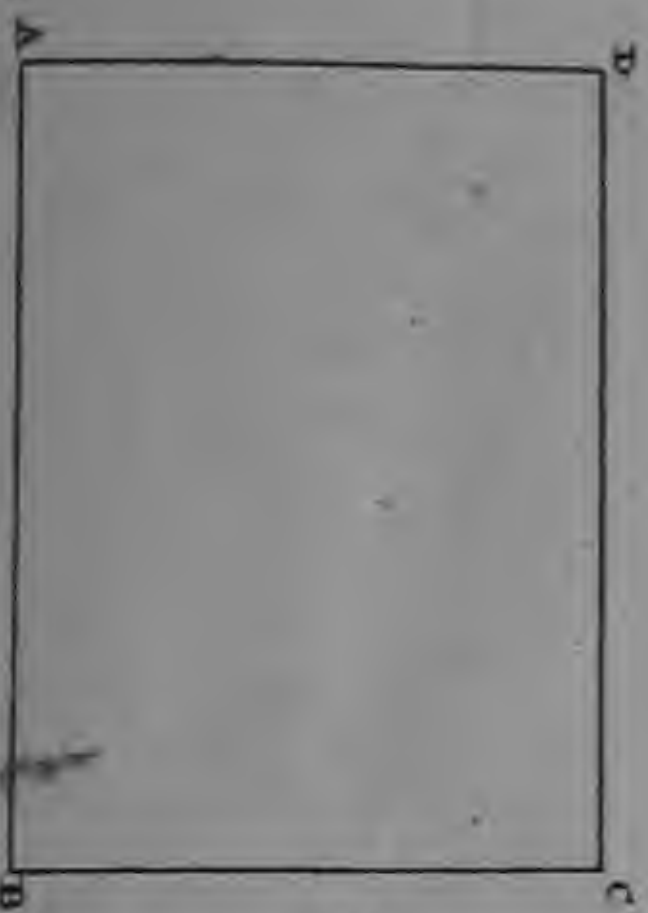




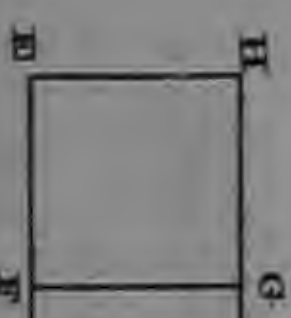


Лепт. 183.

Лепт. 184.



Лепт. 185.



Лепт. 186.

